अंतराण्विक बल

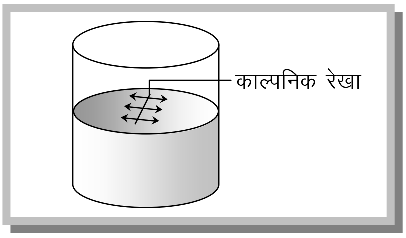
अणुओं के मध्य परस्पर आकर्षण या प्रतिकर्षण बल अंतराण्विक बल कहलाता है। अंतराण्विक बल की प्रकृति विद्युत चुंबकीय है। अंतराण्विक बल दो प्रकार के होते हैं।

ससंजक बल	आसंजक बल
एक ही पदार्थ के अणुओं के मध्य लगने वाला बल, ससंजक बल कहलाता है। यह बल द्रवों में न्यून व गैसों में न्यूनतम होता है।	भिन्न पदार्थ के अणुओं के मध्य लगने वाला बल, आसंजक बल कहलाता है।
उदा० (i) किसी एक द्रव की दो बूँद परस्पर सम्पर्क में लाने पर एक बड़ी बूँद बन जाती है। (ii) पानी की पर्त द्वारा चिपकी काँच की दो प्लेटों को पृथक करना मुश्किल होता है। (iii) पारे की बड़ी बूँद को छोटी छोटी बूँदों में विभक्त करना मुश्किल होता है।	उदा० (i) आसंजक बल के कारण ही चॉक से ब्लैक बोर्ड पर लिखना संभव है। (ii) कागज व गोंद के मध्य आसंजक बल के कारण ही एक कागज दूसरे कागज पर चिपक जाता है। (iii) जल, काँच की सतह को आसंजक बल के कारण ही भिगोता है।

- ससंजक व आसंजक बल अणुओं के मध्य दूरी के अष्टम घात के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं।

पृष्ठ तनाव

किसी द्रव का वह गुण जिसके कारण द्रव की सतह तनी हुई झिल्ली के समान व्यवहार करती है व न्यूनतम क्षेत्रफल प्राप्त करने की चेष्टा करती है पृष्ठ तनाव कहलाता है। द्रव की एक छोटी बूँद गोलाकार होती है, क्योंकि पृष्ठ तनाव के कारण द्रव सतह न्यूनतम क्षेत्रफल प्राप्त करने की चेष्टा करती है व दिये गये आयतन के लिये न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल गोले का होता है।



पृष्ठ तनाव का संख्यात्मक मान द्रव के मुक्त पृष्ठ पर खींची गयी काल्पनिक सरल रेखा की एकांक लम्बाई पर किसी एक ओर लगने वाले बल के तुल्य होती है। बल की दिशा रेखा की लम्बाई के लम्बवत् व द्रव पृष्ठ के स्पर्शीय होती है। अतः यदि काल्पनिक रेखा (लम्बाई L) के एक ओर बल F लग रहा हो तो $T = (F/L)$

(1) यह द्रव की प्रकृति पर निर्भर करता है। पृष्ठ के क्षेत्रफल व काल्पनिक रेखा की लम्बाई पर निर्भर नहीं करता है।

(2) यह एक अदिश राशि है क्योंकि इसकी दिशा अद्वितीय है, जिसे व्यक्त नहीं किया जाता है।

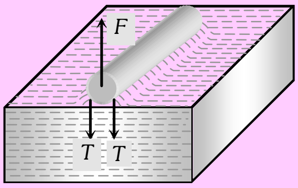
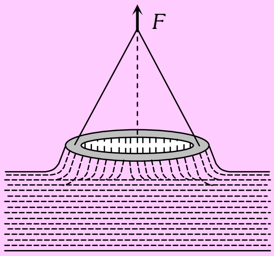
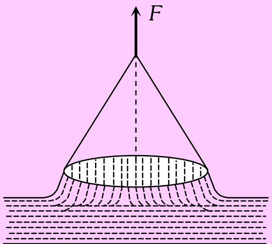
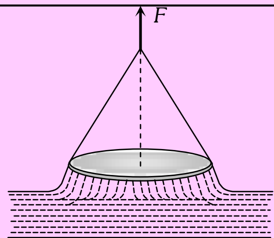
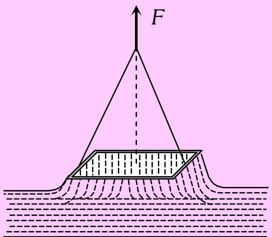
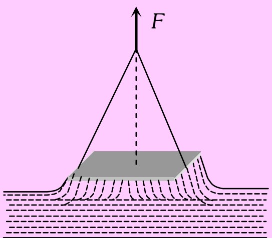
(3) विमा : $[MT^{-2}]$ (बल नियतांक के समान)

(4) इकाई : N/m (S.I.) व $Dyne/cm$ [C.G.S.]

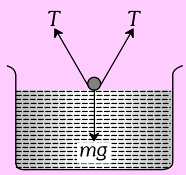
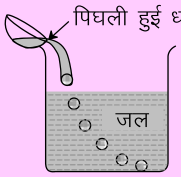
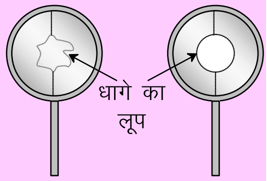
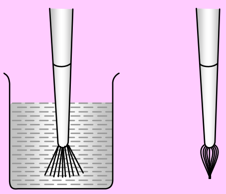
(5) यह एक आण्विक घटना है व इसका मूल कारण विद्युत-चुंबकीय बल है।

पृष्ठ तनाव के कारण बल

यदि W भार का पिण्ड पृष्ठ तनाव T वाले द्रव की सतह पर रखा है तो पिण्ड को सतह से उठाकर अलग करने के लिए आवश्यक बल F, पिण्डों की आकृति अनुसार निम्न सारणी से ज्ञात किया जा सकता है।

पिण्ड	चित्र	बल
सुई लम्बाई $= l$		$F = 2l\,T + W$
खोखली चकती (आंतरिक त्रिज्या $= r_1$ बाहय त्रिज्या $= r_2$)		$F = 2\pi(r_1 + r_2)T + W$
पतली वलय (त्रिज्या $= r$)		$F = 2\pi(r + r)T + W$ $F = 4\pi rT + W$
वृत्ताकार प्लेट या चकती (त्रिज्या $= r$)		$F = 2\pi rT + W$
वर्गाकार फ्रेम (भुजा $= l$)		$F = 8l\,T + W$
वर्गाकार प्लेट		$F = 4l\,T + W$

पृष्ठ तनाव से संबंधित उदाहरण

<table>
<tr>
<td>(1) जब पारे को काँच की साफ प्लेट पर फैलाया जाता है तो वह बूँदों की आकृति ग्रहण करता है। पृष्ठ तनाव के कारण छोटी बूँदे गोलाकार होती हैं क्योंकि इन पर गुरुत्व बल नगण्य होता है। बड़ी बूँदे मध्य से कुछ चपटी हो जाती हैं जबकि सिरों पर गोलाकार होती हैं।
 </td>
<td>(2) जब ग्रीस लगी एक सुई आहिस्ता से स्थिर जल की सतह पर रखी जाती है तो सुई जल की सतह पर तैरती है क्योंकि पृष्ठ तनाव का ऊर्ध्वाधर घटक सुई के भार को संतुलित करता है। यदि सुई का एक सिरा जल पृष्ठ के अंदर चला जाए तो सुई डूब जाएगी।

</td>
</tr>
<tr>
<td>(3) जब पिघली हुई धातु किसी उचित ऊँचाई से, जल में गिरायी जाती है तो गिरती धातु की धारा टूट जाती है। विखण्डित भाग छोटी-छोटी गोलीयों का आकार ग्रहरण कर लेते हैं।

</td>
<td>(4) तार का एक फ्रेम लें और इसे साबुन के घोल में डालें तो बाहर निकलने पर इसमें साबुन के घोल की झिल्ली बन जाती है। झिल्ली पर गीले धागे का एक लूप रखे (चित्रानुसार)। अब लूप के मध्य झिल्ली को किसी पिन से तोड़ दें तो लूप शीघ्रता से वृत्ताकार हो जाएगा।

</td>
</tr>
<tr>
<td>(5) शेविंग/पेंटिग ब्रश में बाल पानी में फैल जाते हैं परन्तु जैसें ही ब्रश बाहर निकाला जाता है बाल आपस में चिपक जाते हैं।
</td>
<td>(6) यदि कपूर का एक छोटा असमान टुकड़ा जल की सतह पर रखा जाए तो वह सतह पर अनियमित गति करने लगता है। इसका कारण यह है कि असमान आकृति का कपूर असमान रूप से घुलता है व पृष्ठ तनाव को स्थानीय रूप से कम करता है। अतः अनियमित बल उसे भिन्न–भिन्न दिशाओं में तेजी से घुमाते हैं।</td>
</tr>
<tr>
<td>(7) वर्षा की बूँदें गोलाकार होती हैं क्योंकि प्रत्येक बूँद पृष्ठ तनाव के कारण न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल प्राप्त करने की चेष्ठा करती है व दिये गये आयतन के लिए गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल न्यूनतम होता है।</td>
<td>(8) ठण्डे पानी पर तेल की बूँद फैल जाती है, जबकि गर्म पानी पर वह वैसे ही बनी रहती है। इसका कारण यह है कि तेल के पृष्ठ तनाव ठण्डे पानी से कम व गर्म पानी से ज्यादा होता है।</td>
</tr>
</table>

पृष्ठ तनाव को प्रभावित करने वाले कारक

(1) ताप : किसी द्रव का पृष्ठ तनाव ताप बढ़ाने पर घटता है। द्रव का पृष्ठ तनाव उसके क्वथनांक पर शून्य होता है तथा क्रांतिक ताप पर पृष्ठ तनाव का गुण विलुप्त हो जाता है। क्रांतिक ताप पर, गैस व द्रव के लिए अंतराण्विक बलों का मान समान होता है, व द्रव बिना किसी प्रतिरोध के बहते हैं। थोड़े तापांतर के लिए, पृष्ठ तनाव में रेखीय परिवर्तन होता जो निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है।

$$T_t = T_0(1 - \alpha t)$$

जहाँ, T_t, T_0 क्रमशः t^oC व 0^oC पर पृष्ठ तनाव हैं और α पृष्ठ तनाव का ताप गुणांक है।

उदाहरण : (i) गर्म सूप, ठण्डे सूप की अपेक्षा स्वादिष्ट लगता है।

(ii) सर्दियों में मशीन के पुर्जे जाम (jam) हो जाते हैं।

(2) अशुद्धियाँ : द्रव की सतह पर उपस्थित या उसमें घुलनशील अशुद्धियाँ पृष्ठ तनाव को प्रभावित करती हैं तथा यह प्रभाव अशुद्धि की मात्रा पर निर्भर करता है। सोडियम क्लोराइड जैसी जल में उच्च घुलनशील अशुद्धि पृष्ठ तनाव बढ़ाती है, जबकि फिनोल जैसी अल्प घुलनशील अशुद्धि जल का पृष्ठ तनाव घटा देती है।

पृष्ठ तनाव के अनुप्रयोग

(1) कपड़ों पर लगे तेल या ग्रीस के धब्बे शुद्ध जल से नहीं हटाए जा सकते। परन्तु जब जल में साबुन घोला जाता है, तो पृष्ठ तनाव घट जाता है, परिणामस्वरूप साबुन के घोल व तेल या ग्रीस के धब्बों के मध्य आसंजक बल बढ़ जाता है। इस प्रकार तेल, ग्रीस व धूल के कण साबुन के घोल के साथ आसानी से मिल जाते हैं और कपड़े आसानी से धुल जाते हैं।

(2) जीवाणुनाशक मलहंमों के पृष्ठ तनाव का मान कम रखा जाता है। पृष्ठ तनाव का मान कम होने पर मलहम त्वचा पर या घाव पर आसानी से फैल जाता है व त्वचा के छिद्रों को रोकता नहीं।

(3) तैलीय स्नेहकों व पेंट्स का पृष्ठ तनाव कम रखा जाता है ताकि वे आसानी से ज्यादा क्षेत्रफल में फैल जाएें।

(4) तेल, जल पृष्ठ पर फैल जाता है क्योंकि तेल का पृष्ठ तनाव ठण्डे जल के पृष्ठ तनाव से कम होता है।

(5) समुद्र में उठी लहरों को तेल डालकर शांत किया जाता है।

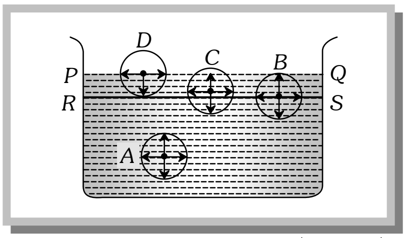
(6) विद्युत परिपथ में तारों को झालते (soldering), समय फ्लक्स (flux) लगाने पर पिघले टिन का पृष्ठ तनाव घट जाता है जिससे वह आसानी से फैलता है।

पृष्ठ तनाव का आण्विक सिद्धान्त

दो अणुओं के मध्य वह अधिकतम दूरी, जहाँ तक अंतराण्विक आकर्षण बलों को अनुभव किया जा सके, आण्विक परास ($\approx 10^{-9} m$) कहलाती है। किसी अणु को केन्द्र व आण्विक परास को त्रिज्या मानकर बनाया गया काल्पनिक गोला आण्विक सक्रियता का गोला कहलाता है। द्रव की मुक्त सतह PQ व इससे r दूरी (आण्विक परास के तुल्य) पर स्थित काल्पनिक रेखा RS एक झिल्ली का निर्माण करती हैं।

द्रव के पृष्ठ पर क्रियाशील तनाव को समझने के लिए द्रव के अणुओं A, B, C व D की कल्पना करें। इनके आण्विक सक्रियता के गोले चित्र में प्रदर्शित हैं।

(1) अणु A पूर्णतः द्रव के अंदर है अतः इस पर सभी दिशाओं से समान आकर्षण बल लगेगा। इस प्रकार इस पर परिणामी बल शून्य हो जाएगा और यह द्रव में मुक्त गति करेगा।



(2) अणु B द्रव की मुक्त सतह से कुछ नीचे है चित्रानुसार इस पर भी सभी दिशाओं से समान बल लगेंगे व इस पर परिणामी बल शून्य हो जाएगा।

(3) अणु C द्रव की मुक्त सतह के एकदम नीचे है व इसके आण्विक सक्रियता के गोले का कुछ भाग द्रव की मुक्त सतह के ऊपर है। अतः अणु C पर ऊपर की ओर आकर्षण बल लगाने वाले अणुओं की संख्या नीचे की ओर आकर्षण बल लगाने वाले अणुओं की संख्या से कम है। इस प्रकार अणु C पर परिणामी बल नीचे की ओर होगा।

(4) अणु D द्रव की मुक्त सतह पर स्थित है। इसके आण्विक सक्रियता के गोले के ऊपरी भाग में कोई अणु नहीं है। अतः अणु D नीचे की ओर अधिकतम आकर्षण बल का अनुभव करेगा।

इस प्रकार द्रव के पृष्ठ पर उपस्थित सभी अणु द्रव के अंदर की ओर परिणामी बल का अनुभव करेंगे। अतः द्रव की मुक्त सतह तनी हुई झिल्ली के समान व्यवहार करेगी।

Problem 1. $2m$ लम्बी लकड़ी की छड़ जल की सतह पर तैर रही है। जल का पृष्ठ तनाव $0.07\ N/m$ है। छड़ के एक ओर साबुन का घोल रखने पर पृष्ठ तनाव $0.06\ N/m$ हो जाता है। छड़ पर लगने वाला कुल बल होगा [Pb. PMT 2002]

(a) $0.07\ N$ (b) $0.06\ N$ (c) $0.01\ N$ (d) $0.02\ N$

Solution : (d) छड़ के एक ओर लगने वाला बल $F_1 = T_1 \times L = 0.07 \times 2 = 0.14N$

छड़ के दूसरी ओर लगने वाला बल $F_2 = T_2 \times L = 0.06 \times 2 = 0.12N$

छड़ पर लगने वाला कुल बल $= F_1 - F_2 = 0.14 - 0.12 = 0.02N$

Problem 2. r त्रिज्या की एक पतली धात्विक चकती जल के सतह पर तैर रही है। चकती द्रव सतह को अपनी परिधि के अनुदिश इस प्रकार दबाती है कि द्रव पृष्ठ चकती की ऊर्ध्वाधर सतह से θ कोण बनाती है। यदि चकती जल के W भार को विस्थापित करती है व जल का पृष्ठ तनाव T है तो चकती का भार होगा [AMU (Med.) 1999]

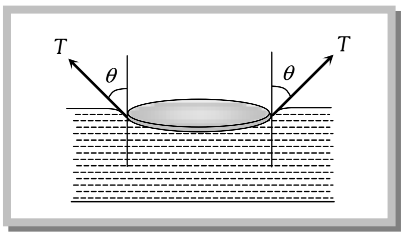
(a) $2\pi rT + W$ (b) $2\pi rT\cos\theta - W$ (c) $2\pi rT\cos\theta + W$ (d) $W - 2\pi rT\cos\theta$

Solution : (c) धात्विक चकती का भार = कुल ऊर्ध्वाधर बल

= उत्प्लावक बल + पृष्ठ तनाव के कारण बल

= विस्थापित जल का भार + $T\cos\theta(2\pi r)$

$= W + 2\pi rT\cos\theta$



Problem 3. एक 10 cm लम्बा तार जल पृष्ठ पर क्षैतिजतः रखा है। तार को सतह से खींचने के लिए $2\times10^{-2}N$ बल की आवश्यकता हो तो जल का पृष्ठ तनाव Nm^{-1} में होगा [AMU (Med.) 1999]

(a) 0.1 N/m (b) 0.2 N/m (c) 0.001 N/m (d) 0.002 N/m

Solution : (a) पृष्ठ तनाव के कारण तार पर बल $F = T\times 2l$

$$\therefore T = \frac{F}{2l} = \frac{2\times10^{-2}}{2\times10\times10^{-2}} = 0.1\, N/m$$

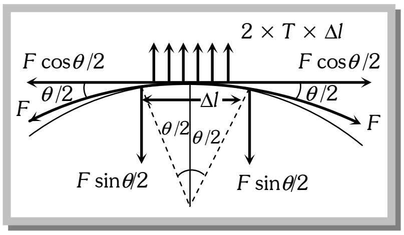
Problem 4. साबुन के घोल की क्षैतिज झिल्ली पर, धागे का एक लूप रखा है। लूप के अन्दर की झिल्ली को तोड़ने पर लूप R त्रिज्या के वृत्त का रूप ले लेता है। यदि घोल का पृष्ठ तनाव T हो तो धागे में तनाव होगा [RPET 1996]

(a) $\pi R^2/T$ (b) $\pi R^2 T$ (c) $2\pi RT$ (d) $2RT$

Solution : (d) माना धागे में तनाव F हो, तो धागे के सूक्ष्म भाग Δl के लिए

$\Delta l = R\theta$ और $2F\sin\theta/2 = 2T\Delta l = 2TR\theta$

$$\Rightarrow F = \frac{TR\theta}{\sin\theta/2} = \frac{TR\theta}{\theta/2} = 2TR \quad (\sin\theta/2 \approx \theta/2)$$



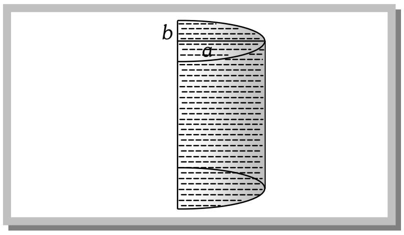
Problem 5. किसी अर्ध-दीर्घवृत्ताकार नली में चित्रानुसार द्रव भरा है। पृष्ठ तनाव के कारण वक्र भाग व समतल भाग पर लगने वाले बलों का अनुपात होगा (नली ऊर्ध्वाधर है)

(a) $\frac{\pi(a+b)}{4b}$

(b) $\frac{2\pi a}{b}$

(c) $\frac{\pi a}{4b}$

(d) $\frac{\pi(a-b)}{4b}$



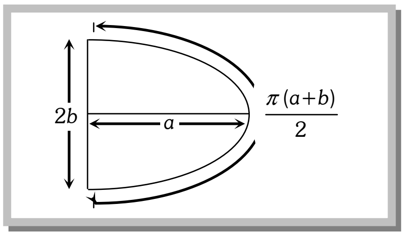
Solution : (a) चित्रानुसार वक्र भाग की लम्बाई $=$ अर्ध परिधि $= \frac{\pi(a+b)}{2}$

समतल भाग $=$ लघु अक्ष $= 2b$

$\therefore$ वक्र भाग पर बल $= T\times\frac{\pi(a+b)}{2}$

समतल भाग पर बल $= T\times 2b$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $= \frac{\pi(a+b)}{4b}$



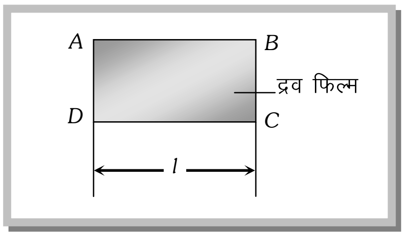
Problem 6. चित्रानुसार किसी फ्रेम $ABCD$ पर द्रव फिल्म बनी है। तार CD (घर्षण रहित) गति के लिए मुक्त है। साम्यावस्था में CD पर लटके द्रव्यमान का मान होगा

(a) $\frac{Tl}{g}$

(b) $\frac{2Tl}{g}$

(c) $\frac{g}{2Tl}$

(d) $T\times l$



Solution : (b) तार CD में लटका भार (mg) = पृष्ठ तनाव के कारण ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर बल $(2Tl) \Rightarrow m = \frac{2Tl}{g}$

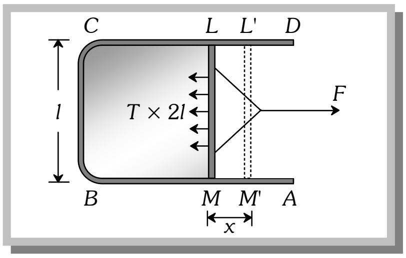
पृष्ठ ऊर्जा

द्रव की सतह पर उपस्थित अणु अंदर की ओर एक परिणामी बल का अनुभव करते हैं। अतः द्रव के अंदर से किसी अणु को द्रव की सतह पर लाने में अंतराण्विक बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है। यह कार्य पृष्ठ पर उपस्थित अणु में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाती है। द्रव के पृष्ठ पर उपस्थित अणुओं में निहित प्रति एकांक क्षेत्रफल स्थितिज ऊर्जा ही पृष्ठ ऊर्जा कहलाती है।

इकाई : $Joule/m^2$ (S.I.) erg/cm^2 (C.G.S.)

विमा : $[MT^{-2}]$

यदि तार का एक आयताकार फ्रेम $ABCD$ जिससे सरकने वाला तार LM संलग्न है। साबुन के घोल में डुबाया जाता है तो फ्रेम पर एक झिल्ली बन जाती है। पृष्ठ तनाव के कारण झिल्ली सिकुड़ने का प्रयास करती है। इस कारण तार LM अंदर की ओर खिंचेगा। इसे अपनी स्थिति में रखने के लिए बल F लगाना होगा जो पृष्ठ तनाव के कारण इस पर लगने वाले बल के तुल्य होगा।



पृष्ठ तनाव के कारण तार पर लगने वाला बल $F = T \times 2l$

जहाँ l तार LM की लम्बाई है। झिल्ली के दो मुक्त सतह होती है अतः तार की लम्बाई दो गुनी की गयी है।

माना तार LM थोड़ा विस्थापित x किया जाता है तथा स्थिति $L'M'$ पर लाया जाता है। इस प्रक्रिया में, झिल्ली के क्षेत्रफल में $2l \times x$ (दोनों पृष्ठों पर) वृद्धि होगी तथा क्षेत्रफल वृद्धि में किया गया कार्य

$W = F \times x = (T \times 2l) \times x = T \times (2lx) = T \times \Delta A$

$\therefore\ W = T \times \Delta A$ [ΔA = झिल्ली के क्षेत्रफल (दोनों पृष्ठ) में कुल वृद्धि]

इस प्रक्रिया में यदि ताप समान रहे तो यह कार्य, पृष्ठ ऊर्जा के रूप में संचित होगा।

उपरोक्त व्यंजक से, $T = \dfrac{W}{\Delta A}$ या $T = W$ [यदि $\Delta A = 1$]

अतः पृष्ठ तनाव नियत ताप पर, द्रव के पृष्ठ क्षेत्रफल में (पृष्ठ तनाव के कारण लगने वाले बल के विरुद्ध) एकांक वृद्धि में किये गये कार्य के तुल्य होता है।

द्रव की बूँद या साबुन के बुलबुले की त्रिज्या वृद्धि में किया गया कार्य

(1) यदि द्रव की बूँद की प्रारम्भिक त्रिज्या r_1 व अंतिम त्रिज्या r_2 हो तब

$W = T \times$ पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि

$W = T \times 4\pi[r_2^2 - r_1^2]$ [चूँकि बूँद की मात्र एक मुक्त सतह होती है।]

(2) साबुन के बुलबुले के लिए

$W = T \times 8\pi[r_2^2 - r_1^2]$ [बुलबुले की दो मुक्त सतह होती है]

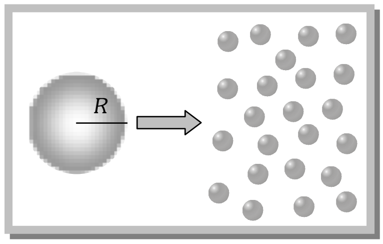
बड़ी बूँद का विभक्त होना

जब R त्रिज्या की एक बड़ी बूँद n छोटी बूँदों (प्रत्येक r त्रिज्या) में विभक्त होती है तब द्रव का पृष्ठ क्षेत्रफल बढ़ता है। अतः पृष्ठ तनाव के विरुद्ध कार्य सम्पन्न होता है।

चूँकि द्रव का आयतन नियत् रहता है अतः $\frac{4}{3}\pi R^3 = n\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \therefore\ R^3 = nr^3$

सम्पन्न कार्य $= T \times \Delta A = T$ [n बूँदों का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल – बड़ी बूँद का पृष्ठ क्षेत्रफल] $= T[n4\pi r^2 - 4\pi R^2]$

सम्पन्न कार्य के विभिन्न सूत्र			
$4\pi T[nr^2 - R^2]$	$4\pi R^2 T[n^{1/3} - 1]$	$4\pi T r^2 n^{2/3}[n^{1/3} - 1]$	$4\pi T R^3\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$



यदि कार्य बाह्य स्त्रोत द्वारा सम्पन्न न हो तो द्रव की आंतरिक ऊर्जा घटती है, परिणामस्वरूप ताप घट जाता है। इस कारण ही फुहारने (spraying) पर ठंडक उत्पन्न होती है।

ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

ऊष्मीय ऊर्जा में हानि = पृष्ठ तनाव के विरुद्ध सम्पन्न कार्य

$$JQ = W$$

$$\Rightarrow \qquad JmS\Delta\theta = 4\pi T R^3\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad J\frac{4}{3}\pi R^3 d\,S\Delta\theta = 4\pi R^3 T\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] \qquad \left[\; m = V\times d = \frac{4}{3}\pi R^3 \times d\right]$$

$\therefore$ ताप में कमी $\Delta\theta = \frac{3T}{JSd}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$

जहाँ J = ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक, S = द्रव की विशिष्ट ऊष्मा, d = द्रव का घनत्व

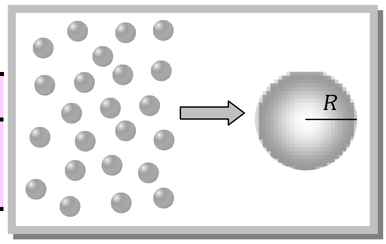
बड़ी बूँद का बनना

यदि r त्रिज्या वाली n बूँद मिलकर R त्रिज्या की एक बड़ी बूँद का निर्माण करें तो द्रव का पृष्ठ क्षेत्रफल घटता है।

मुक्त पृष्ठ ऊर्जा = प्रारम्भिक पृष्ठ ऊर्जा – अंतिम पृष्ठ ऊर्जा

$$E = n4\pi r^2 T - 4\pi R^2 T$$

मुक्त ऊर्जा के विभिन्न सूत्र			
$4\pi T[nr^2 - R^2]$	$4\pi R^2 T(n^{1/3} - 1)$	$4\pi T r^2 n^{2/3}(n^{1/3} - 1)$	$4\pi T R^3\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$



(i) यदि यह बड़ी बूँद द्वारा अवशोषित हो जाए तो, उसके ताप में वृद्धि $\Delta\theta = \frac{3T}{JSd}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$

(ii) यदि मुक्त ऊर्जा बिना ह्रास के बड़ी बूँद की गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाए तो ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

$$\frac{1}{2}mv^2 = 4\pi R^3 T\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi R^3 d\right]v^2 = 4\pi R^3 T\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] \Rightarrow v^2 = \frac{6T}{d}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$$

$$\therefore \qquad v = \sqrt{\frac{6T}{d}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

Problem 7. पारे की दो छोटी बूँद (प्रत्येक त्रिज्या R) मिलकर एक बड़ी बूँद का निर्माण करती है। परिवर्तन के पूर्व व पश्चात् पृष्ठ ऊर्जाओं का अनुपात होगा [AIIMS 2003]

(a) $1 : 2^{1/3}$ (b) $2^{1/3} : 1$ (c) $2 : 1$ (d) $1 : 2$

Solution : (b) $R = n^{1/3} r = 2^{1/3} r \Rightarrow R^2 = 2^{2/3} r^2 \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} = 2^{-2/3}$

$$\frac{\text{प्रारम्भिक पृष्ठ ऊर्जा}}{\text{अंतिम पृष्ठ ऊर्जा}} = \frac{2(4\pi r^2 T)}{(4\pi R^2 T)} = 2\left(\frac{r^2}{R^2}\right) = 2\times 2^{-2/3} = 2^{1/3}$$

Problem 8. साबुन के बुलबुले की त्रिज्या R से $2R$ करने की प्रक्रिया में सम्पन्न कार्य होगा [CPMT 1991; RPET 2001; BHU 2003]

(a) $24\pi R^2 S$ (b) $48\pi R^2 S$ (c) $12\pi R^2 S$ (d) $36\pi R^2 S$

Solution : (a) $W = 8\pi T(R_2^2 - R_1^2) = 8\pi S[(2R)^2 - (R)^2] = 24\pi R^2 S$

Problem 9. साबुन के घोल (पृष्ठ तनाव $\frac{3}{100} N/m$) से $10 cm$ त्रिज्या का बुलबुला बनाने में सम्पन्न कार्य होगा

[MP PMT 1995; MH CET 2002]

(a) $75.36\times 10^{-4} J$ (b) $37.68\times 10^{-4} J$ (c) $150.72\times 10^{-4} J$ (d) $75.36 J$

Solution : (a) $W = 8\pi R^2 T = 8\pi(10\times 10^{-2})^2 \frac{3}{100} = 75.36\times 10^{-4} J$

Problem 10. $2mm$ त्रिज्या की पारे की बूँद 8 समान छोटी बूँदों में विभक्त की जाती है। पृष्ठ ऊर्जा में वृद्धि होगी (पारे का पृष्ठ तनाव $= 0.465 J/m^2$) [UPSEAT 2002]

(a) $23.4 \mu J$ (b) $18.5 \mu J$ (c) $26.8 \mu J$ (d) $16.8 \mu J$

Solution : (a) पृष्ठ ऊर्जा में वृद्धि $= 4\pi R^2 T(n^{1/3} - 1) = 4\pi(2\times 10^{-3})^2(0.465)(8^{1/3} - 1) = 23.4\times 10^{-6} J = 23.4 \mu J$

Problem 11. साबुन के घोल की झिल्ली के आकार में $10 cm \times 6 cm$ से $10 cm \times 11 cm$ तक वृद्धि करने में $3\times 10^{-4} J$ कार्य किया जाता है। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव होगा [MP PET 1999; MP PMT 2000; AIIMS 2000; JIPMER 2001, 02]

(a) $1.5\times 10^{-2} Nm^{-1}$ (b) $3.0\times 10^{-2} Nm^{-1}$ (c) $6.0\times 10^{-2} Nm^{-1}$ (d) $11.0\times 10^{-2} Nm^{-1}$

Solution : (b) $A_1 = 10\times 6 = 60 cm^2 = 60\times 10^{-4} m^2$, $A_2 = 10\times 11 = 110 cm^2 = 110\times 10^{-4} m^2$

चूँकि साबुन की झिल्ली के दो पृष्ठ हैं $\therefore W = T\times 2\Delta A$

$$\Rightarrow W = T\times 2\times (A_2 - A_1) \Rightarrow T = \frac{W}{2\times 50\times 10^{-4}} = \frac{3\times 10^{-4}}{2\times 50\times 10^{-4}} = 3\times 10^{-2} N/m$$

Problem 12. $10 cm$ लम्बाई के दो समांतर तारों के मध्य $0.5 cm$ दूरी है। तारों के मध्य पानी की एक झिल्ली बनी है। यदि उनके मध्य दूरी को $1 mm$ बढ़ाया जाए तो कितना कार्य करना होगा (जल का पृष्ठ तनाव $= 7.2\times 10^{-2} N/m$)

[Roorkee 1986; MP PET 2001]

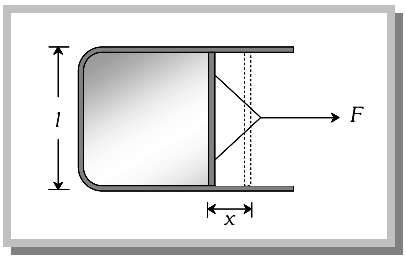
(a) $7.22\times 10^{-6} J$ (b) $1.44\times 10^{-5} J$ (c) $2.88\times 10^{-5} J$ (d) $5.76\times 10^{-5} J$

Solution : (b) चूँकि झिल्ली की दो मुक्त सतह हैं $W = T\times 2\Delta A$

$W = T\times 2l\times x$

$= 7.2\times 10^{-2}\times 2\times 0.1\times 1\times 10^{-3}$

$= 1.44\times 10^{-5} J$



Problem 13. किसी घोल से V आयतन का बुलबुला बनाने में W कार्य करना पड़ता है, तो समान घोल से $2V$ आयतन के बुलबुले को बनाने में सम्पन्न कार्य होगा [MP PET 1989]

(a) $W/2$ (b) $\sqrt{2} W$ (c) $\sqrt[3]{2} W$ (d) $\sqrt[3]{4} W$

Solution : (d) बुलबुले का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} V^{1/3} \Rightarrow R^2 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} V^{2/3} \Rightarrow R^2 \propto V^{2/3}$

बुलबुला बनाने में किया गया कार्य $W = 8\pi R^2 T \Rightarrow W \propto R^2 \propto V^{2/3}$

$$\therefore \frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{2/3} = \left(\frac{2V}{V}\right)^{2/3} = (2)^{2/3} = (4)^{1/3} \Rightarrow W_2 = \sqrt[3]{4}\, W$$

Problem 14. किसी द्रव की r त्रिज्या की कई बूँद मिलकर R त्रिज्या की एक बड़ी बूँद का निर्माण करती हैं। द्रव का पृष्ठ तनाव T व आयतन V हो तो मुक्त ऊर्जा होगी

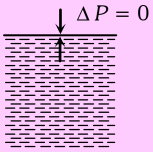
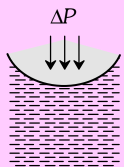
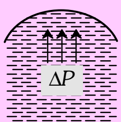
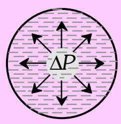
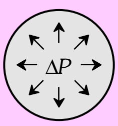
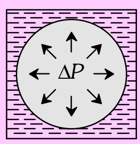
(a) $3VT\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$ (b) $3VT\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$ (c) $VT\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$ (d) $VT\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{R^2}\right)$

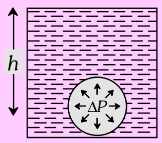
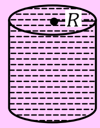
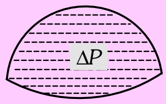
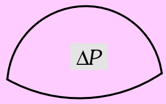
Solution : (b) मुक्त ऊर्जा $= 4\pi TR^3\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right] = 3\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)T\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right] = 3VT\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right]$

दाब आधिक्य

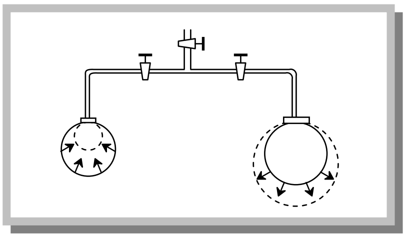
पृष्ठ तनाव के गुण के कारण बुलबुले या बूँद सिकुड़ने का प्रयास करते हैं। अतः आंतरिक द्रव्य को सम्पीड़ित करते हैं। इस कारण आंतरिक दाब बढ़ता है जो साम्यावस्था आने पर और अधिक सम्पीड़न को रोकता है। अतः साम्यावस्था में, किसी बूँद या बुलबुले का आंतरिक दाब, बाह्य दाब से अधिक होता है। दोनों ओर दाब का अंतर ही दाब आधिक्य कहलाता है। बूँद में दाब आधिक्य द्रव के द्रव स्थैतिक दाब द्वारा जबकि बुलबुले में, आंतरिक वायु के गेज दाब (gauge pressure) द्वारा प्रदान किया जाता है।

विभिन्न स्थितियों में दाब आधिक्य :

समतल सतह	अवतल सतह
 $\Delta P = 0$	 $\Delta P = \frac{2T}{R}$
उत्तल सतह	**बूँद**
 $\Delta P = \frac{2T}{R}$	 $\Delta P = \frac{2T}{R}$
वायु में बुलबुला	**द्रव में बुलबुला**
 $\Delta P = \frac{4T}{R}$	 $\Delta P = \frac{2T}{R}$
d घनत्व के द्रव के मुक्त पृष्ठ से h गहराई पर बुलबुला	**बेलनाकार द्रव सतह**

 $\Delta P=\frac{2T}{R}+hdg$	 $\Delta P=\frac{T}{R}$
असमान त्रिज्या की द्रव सतहें	असमान त्रिज्या की द्रव झिल्ली
 $\Delta P=T\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]$	 $\Delta P=2T\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]$

- दाब आधिक्य बूँद (या बुलबुले) की त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती होता है। अर्थात् छोटी बूँद (या बुलबुले) में, बड़ी बूँद (या बुलबुले) की तुलना में अधिक दाब होता है। इस कारण ही यदि असमान आकार के दो बुलबुले चित्रानुसार किसी पतली नली द्वारा एक दूसरे के सम्पर्क में लाये जाएें, तो वायु छोटे बुलबुले से बड़े बुलबुले में चली जाएगी अतः छोटा बुलबुला सिकुड़ेगा व बड़ा बुलबुला फैल जाएगा।



Problem 15. पानी की सतह के ठीक नीचे बने वायु के बुलबुले (त्रिज्या 0.1*mm*) में दाब होगा (जल का पृष्ठ तनाव $70\times10^{-3}Nm^{-1}$ व वायुमण्डलीय दाब $=1.013\times10^{5}Nm^{-2}$) [AMU (Med.) 2002]

(a) $2.054\times10^{3}Pa$ (b) $1.027\times10^{3}Pa$ (c) $1.027\times10^{5}Pa$ (d) $2.054\times10^{5}Pa$

Solution : (c) द्रव में बने बुलबुले में दाब $=P_o+\frac{2T}{R}=1.013\times10^{5}+2\times\frac{70\times10^{-3}}{0.1\times10^{-3}}=1.027\times10^{5}Pa.$

Problem 16. साबुन के घोल के बुलबुले की त्रिज्या समान घोल के अन्य किसी बुलबुले की त्रिज्या की चार गुनी है। बुलबुलों में दाब आधिक्यों का अनुपात होगा [AIIMS 2000]

(a) 1 : 4 (b) 4 : 1 (c) 16 : 1 (d) 1 : 16

Solution : (a) साबुन के घोल के बुलबुले में दाब आधिक्य $\Delta P=\frac{4T}{r}\Rightarrow\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2}=\frac{r_2}{r_1}=1:4$

Problem 17. साबुन के घोल के दो बुलबुलों का आंतरिक दाब 1.01 व 1.02 वायुमण्डलीय है। उनके आयतनों का अनुपात होगा [MP PMT 1991]

(a) 102 : 101 (b) $(102)^3:(101)^3$ (c) 8 : 1 (d) 2 : 1

Solution : (c) दाब आधिक्य $\Delta P=P_{in}-P_{out}=1.01atm-1atm=0.01atm$ तथा इसी प्रकार $\Delta P_2=0.02atm$

बुलबुले का आयतन $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $\therefore V\propto r^3\propto\frac{1}{(\Delta P)^3}$ [$\Delta P\propto\frac{1}{r}$ या $r\propto\frac{1}{\Delta P}$]

$$\therefore\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}\right)^3=\left(\frac{0.02}{0.01}\right)^3=\left(\frac{2}{1}\right)^3=\frac{8}{1}$$

Problem 18. पानी की सतह के ठीक नीचे वायु के किसी बुलबुले (त्रिज्या *r*) में दाब आधिक्य P_1 है। पानी की सतह के ठीक ऊपर पानी की किसी बूँद में दाब आधिक्य P_2 है। यदि पृष्ठ तनाव *T* हो तो

(a) $P_1 = 2P_2$ (b) $P_1 = P_2$ (c) $P_2 = 2P_1$ (d) $P_2 = 0, P_1 \neq 0$

Solution : (b) पानी की सतह के ठीक नीचे बुलबुले में दाब आधिक्य $P_1 = \frac{2T}{r}$

तथा बूँद के अंदर दाब आधिक्य $P_2 = \frac{2T}{r}$ $\therefore P_1 = P_2$

द्रव के चन्द्र तल (Meniscus) की प्रकृति

हम जानते हैं कि द्रव जिस पात्र में रखा जाता है उसी का आकार ग्रहण कर लेता है अर्थात् द्रव ऐसे किसी भी बल का स्थायी विरोध नहीं करता जो उसका आकार बदलता है। चूँकि बल का प्रभाव अपनी लम्बवत् दिशा में नगण्य होता है। अतः द्रव की सतह अपने आपको इस तरह समंजित करती है कि परिणामी बल उसके लम्बवत् हो।

जब किसी केशनली के द्रव में डुबोया जाता है तो सम्पर्क सतहों पर द्रव सतह वक्राकार हो जाती है। यह वक्रता दो बलों ससंजक व आसंजक बल के परिणामी द्वारा उत्पन्न होती है। द्रव की इस वक्र सतह को द्रव का चंद्रतल कहते हैं।

यदि द्रव का अणु A किसी ठोस (जैसे केशनली की दीवार) के सम्पर्क में, हो तो अणु A पर निम्न बल कार्यरत् होंगे –

(i) आसंजक बल F_a (नली की दीवार के लम्बवत् बाहर की ओर)

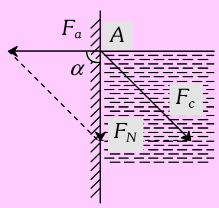
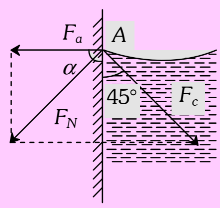
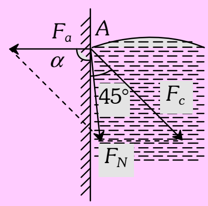
(ii) ससंजक बल F_c (ऊर्ध्वाधर से 45° कोण पर)

परिणामी बल F_N, बलों F_a व F_c के मानों पर निर्भर करता है।

यदि परिणामी बल F_N , F_a से α कोण बनाये तो

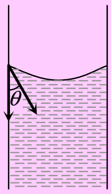
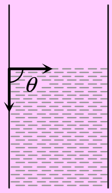
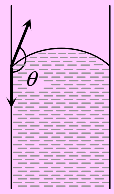
$$\tan \alpha = \frac{F_c \sin 135^o}{F_a + F_c \cos 135^o} = \frac{F_c}{\sqrt{2}\, F_a - F_c}$$

परिणामी बल की दिशा ज्ञात करके चन्द्रतल की आकृति ज्ञात की जा सकती है क्योंकि द्रव की मुक्त सतह अपने आप को इस तरह समंजित करती है कि परिणामी बल उसके लम्बवत् हो।

यदि $F_c = \sqrt{2}Fa$ हो तो $\tan\alpha = \infty$ $\therefore \alpha = 90^o$ अर्थात् परिणामी बल ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करेगा अतः द्रव का तल क्षैतिज होगा।	$F_c < \sqrt{2}Fa$ $\tan \alpha =$ धनात्मक $\therefore \alpha$ एक न्यून कोण होगा अर्थात् परिणामी बल द्रव सतह के बाहर की ओर होगा अतः द्रव तल अवतल होगा।	$F_c > \sqrt{2}Fa$ $\tan \alpha = -ve$ $\therefore \alpha$ एक अधिक कोण होगा अर्थात् परिणामी बल द्रव सतह के अंदर की ओर होगा अर्थात् द्रव तल उत्तल होगा।
		
उदाहरण: चाँदी की पर्त चढ़ी केशनली में जल।	*उदाहरण:* काँच की केशनली में जल।	*उदाहरण:* काँच की केशनली में पारा।

स्पर्श कोण

द्रव व ठोस के सम्पर्क बिन्दु पर द्रव के तल व ठोस तल पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के मध्य द्रव के अंदर बना कोण द्रव-ठोस युग्म के लिए स्पर्श कोण कहलाता है।

$\theta < 90^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta > 90^\circ$
$F_a > \frac{F_c}{\sqrt{2}}$	$F_a = \frac{F_c}{\sqrt{2}}$	$F_a < \frac{F_c}{\sqrt{2}}$
		
अवतल तल	समतल तल	उत्तल तल
द्रव, ठोस सतह को गीला करेगा	द्रव, ठोस सतह को गीला नहीं करेगा	द्रव, ठोस सतह को गीला नहीं करेगा

Important points

(i) स्पर्श कोण का मान 0° व 180° के मध्य होता है।

शुद्ध जल व काँच के लिए, $\theta = 0^o$; साधारण जल व काँच के लिए $\theta = 8^o$ शुद्ध जल व चाँदी के लिए $\theta = 90^o$; पारे व काँच के लिए, $\theta = 138^o$ जल व क्रोमियम के लिए $\theta = 160^o$

(ii) किसी दिये गये द्रव व ठोस के युग्म के लिए स्पर्श कोण का मान विशिष्ट होता है।

(iii) यह द्रव या ठोस के झुकाव पर निर्भर नहीं करता।

(iv) ताप बढ़ाने पर, स्पर्श कोण घटता है।

(v) घुलनशील अशुद्धियाँ स्पर्श कोण को बढ़ा देती हैं।

(vi) आंशिक रूप से घुलनशील अशुद्धियाँ स्पर्श कोण घटा देती हैं।

केशिकत्व

यदि अत्यल्प त्रिज्या की नली (केशनली) किसी द्रव में डुबोयी जाये तो केशनली में द्रव, बाहरी द्रव की तुलना में कुछ ऊपर चढ़ जाता है या नीचे उतर जाता है।

यह घटना केशिकत्व कहलाती है।

केशिकत्व का कारण वक्र पृष्ठ (उत्तल या अवतल) के ऊपर व नीचे के दाब में अंतर है।

केशिकत्व के उदाहरण:

(i) स्याही सोख्ता के बारीक छिद्रों में स्याही ऊपर चढ़ जाती है।

(ii) तौलिया पानी को सोखता है।

(iii) दीपक की बत्ती में केशिकत्व के कारण ही तेल चढ़ता है।

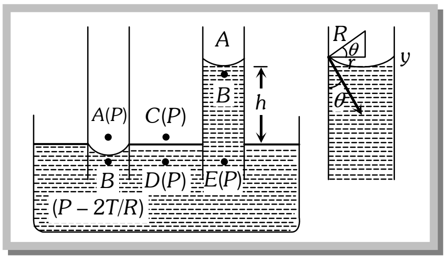
(iv) वर्षा ऋतु में वायुमण्डल की नमी के कारण लकड़ी फूल जाती है।

(v) मिट्टी में नमी सुरक्षित रखने के लिए किसान अपने खेत जोतते हैं।

(vi) मिट्टी की तुलना में रेत जल्दी सूखती है, क्योंकि रेत के कणों के मध्य छिद्र, मिट्टी के छिद्रों की तरह बारीक नहीं होते व केशिकत्व के कारण जल नहीं खींच पाते।

केशनली में द्रव के उन्नयन का सूत्र (Ascent Formula)

जब r त्रिज्या की केशनली का एक सिरा d घनत्व वाले द्रव में डाला जाए और द्रव केशनली को भिगोता हो (जल व काँच की केशनली) तो नली में चढ़े द्रव का तल अवतल हो जाएगा।



R = द्रव के चन्द्रतल की त्रिज्या

T = द्रव का पृष्ठ तनाव

P = वायुमण्डलीय दाब

बिन्दु A पर दाब $= P$, बिन्दु B पर दाब $= P - \frac{2T}{R}$

बिन्दु C द्रव की समतल सतह के ठीक ऊपर व बिन्दु D द्रव की समतल सतह के ठीक नीचे भी दाब P (वायुमण्डलीय दाब) होगा। बिन्दु B व D समान क्षैतिज तल पर हैं परन्तु इन बिन्दुओं पर दाब समान नहीं है।

साम्यावस्था प्राप्त करने के लिए द्रव नली में h ऊँचाई तक चढ़ जाएगा।

द्रव स्तम्भ के कारण दाब = पृष्ठ तनाव के कारण दाबान्तर

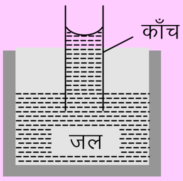
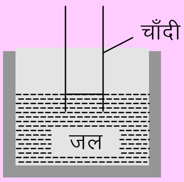
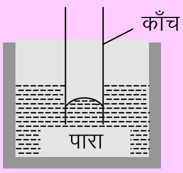
$$\Rightarrow hdg = \frac{2T}{R}$$

$$\therefore \qquad h = \frac{2T}{Rdg} = \frac{2T\cos\theta}{rdg} \qquad \left[R = \frac{r}{\cos\theta} \right]$$

Important points

(i) केशकीय उन्नयन द्रव व ठोस की प्रकृति पर निर्भर करता है अर्थात् T, d, θ और R पर।

(ii) विभिन्न द्रव-ठोस युग्मों के लिए केशिकीय उन्नयन।

	चन्द्र तल	स्पर्श कोण	स्तर
	अवतल	$\theta < 90^\circ$	उठता है।
	समतल	$\theta = 90^\circ$	ना उठता है ना गिरता है।
	उत्तल	$\theta > 90^\circ$	गिरता है।

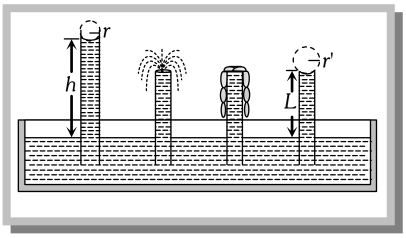
(iii) दिये गये द्रव व ठोस के लिए किसी विशेष स्थान पर

$$h \propto \frac{1}{r} \qquad [\ T, \theta, d \text{ व } g \text{ नियत हैं}]$$

अर्थात् त्रिज्या कम होने पर द्रव, केशनली में अधिक ऊपर जाएगा व त्रिज्या अधिक होने पर द्रव, केशनली में कम ऊँचाई तक जाएगा। इसे जूरिन नियम कहते हैं।

(iv) यदि चन्द्रतल में निहित जल भी गणना में लिया जाए तो अधिक उपयुक्त सूत्र

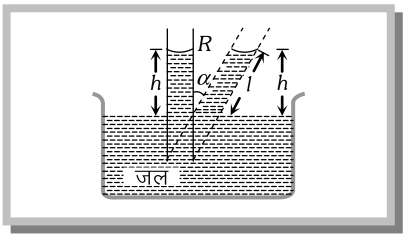
$$h = \frac{2T\cos\theta}{rdg} - \frac{r}{3}$$



(v) अपर्याप्त लम्बाई की केशनली अर्थात् $L < h$, लेने पर द्रव केशनली के बाहर नहीं फैलेगा बल्कि नली के उच्च बिन्दु पर पहुँचने पर द्रव के चन्द्रतल की त्रिज्या बढ़ जाएगी जबकि प्रकृति समान रहेगी अर्थात्

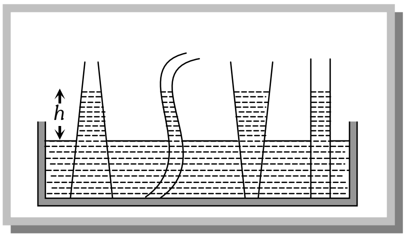
$$hr = Lr' \quad L < h \quad \therefore r' > r$$

(vi) यदि एक केशनली द्रव में डुबो कर कुछ तिरछी (α कोण पर) की जाए तो केशनली में द्रव स्तम्भ की लम्बाई (l) तो बढ़ जाएगी परन्तु द्रव स्तम्भ की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई h अपरिवर्तित रहेगी।



$$h = l\cos\alpha \text{ या } l = \frac{h}{\cos\alpha}$$

(vii) साम्यावस्था में, द्रव स्तम्भ की ऊँचाई h केशनली की आकृति पर निर्भर नहीं करती (यदि चन्द्रतल की त्रिज्या समान रहे) यही कारण है कि विभिन्न आकार व आकृतियों की केशनलियों में चन्द्रतल की त्रिज्या समान होने पर द्रव स्तम्भ की ऊँचाई भी समान होगी।



Problem 19. किसी केशनली में जल $10 cm$ ऊँचाई तक चढ़ता है व पारा $3.5 cm$ गिरता है। यदि पारे का घनत्व $13.6\ gm/cc$ हो व स्पर्श कोण 135° हो तथा जल का घनत्व $1\ gm/cc$ व स्पर्श कोण 0^o हो तो दोनों द्रवों के पृष्ठ तनावों का अनुपात होगा $(\cos 135^o = 0.7)$ [MP PMT 1988; EAMCET (Med.) 2003]

(a) 1 : 14 (b) 5 : 34 (c) 1 : 5 (d) 5 : 27

Solution : (b) $h = \frac{2T\cos\theta}{rdg}$ $\quad \therefore \frac{h_W}{h_{Hg}} = \frac{T_W}{T_{Hg}} \frac{\cos\theta_W}{\cos\theta_{Hg}} \frac{d_{Hg}}{d_W}$ [r व g नियत है]

$$\Rightarrow \frac{10}{3.5} = \frac{T_W}{T_{Hg}} . \frac{\cos 0^o}{\cos 135} \frac{13.6}{1} \Rightarrow \frac{T_W}{T_{Hg}} = \frac{10 \times 0.7}{3.5 \times 13.6} = \frac{20}{136} = \frac{5}{34}$$

Problem 20. किसी ऊर्ध्वाधर केशनली में जल $2.0\ cm$ चढ़ता है। यदि नली ऊर्ध्वाधर से 60^o झुकायी जाए तो केशनली में द्रव स्तम्भ की लम्बाई होगी [UPSEAT 2002]

(a) $2.0\ cm$ (b) $4.0\ cm$ (c) $\frac{4}{\sqrt{3}} cm$ (d) $2\sqrt{2}\ cm$

Solution : (b) वह ऊँचाई जहाँ तक जल केशनली में चढ़ता है $l = \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{2cm}{\cos 60} = 4cm$. [$h$ = ऊर्ध्वाधर ऊँचाई, α = ऊर्ध्वाधर से कोण]

Problem 21. समान व्यास की दो केशनलियाँ, आपेक्षिक घनत्व 0.8 व 0.6 तथा पृष्ठ तनाव 60 व 50 $dyne/cm$ वाले द्रवों में ऊर्ध्वाधर रखी है। दोनों नलियों में द्रव स्तम्भों की ऊँचाईयों का अनुपात $\frac{h_1}{h_2}$ होगा [MP PMT 2002]

(a) $\frac{10}{9}$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) $\frac{10}{3}$ (d) $\frac{9}{10}$

Solution : (d) $h = \frac{2T\cos\theta}{rdg}$ [चूँकि केशनियों के व्यास समान हैं व द्रवों के लिए θ समान लेने पर]

$\therefore \frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = \left(\frac{60}{50}\right)\times\left(\frac{0.6}{0.8}\right) = \left(\frac{36}{40}\right) = \frac{9}{10}$.

Problem 22. R त्रिज्या की केशनली जल में डुबोयी जाती है तो उसमें जल H ऊँचाई तक चढ़ जाता है। नली में द्रव का द्रव्यमान M यदि नली की त्रिज्या दोगुनी कर दी जाए तो नली में द्रव स्तम्भ का भार होगा [RPMT 1997; RPET 1999; CPMT 2002]

(a) M (b) $2M$ (c) $M/2$ (d) $4M$

Solution : (b) केशनली में द्रव स्तम्भ का द्रव्यमान $M = V\rho = (\pi r^2 h)\rho$ $\therefore M \propto r^2 h \propto r$ [As $h \propto \frac{1}{r}$]

अतः त्रिज्या दोगुनी करने पर, नली में द्रव स्तम्भ का भार भी दोगुना हो जाएगा।

Problem 23. पृथ्वी की सतह पर किसी केशनली में द्रव h ऊँचाई तक चढ़ता है। चन्द्रमा की सतह पर केशनली में द्रव स्तम्भ की ऊँचाई होगी [MP PMT 2001]

(a) $6h$ (b) $\frac{1}{6}h$ (c) h (d) शून्य

Solution : (a) $h = \frac{2T\cos\theta}{rdg}$ $\therefore h \propto \frac{1}{g}$ [यदि अन्य राशियाँ समान रहें]

$\frac{h_{moon}}{h_{earth}} = \frac{g_{earth}}{g_{moon}} = 6 \Rightarrow h_{moon} = 6h$ [$g_{earth} = 6g_{moon}$]

Problem 24. पृथ्वी की सतह पर स्थिर अवस्था में किसी केशनली में द्रव h ऊँचाई तक चढ़ता है। h का मान बढ़ेगा यदि नली ले जायी जाए [RPET 2000]

(a) सूर्य पर (b) ध्रुवों पर

(c) त्वरित गति से ऊपर जाती लिफ्ट में (d) त्वरित गति से नीचे आती लिफ्ट में

Solution : (d) $h \propto \frac{1}{g}$ त्वरित गति से नीचे जाती लिफ्ट में प्रभावी त्वरण घटेगा। अतः h बढ़ेगा।

Problem 25. यदि जल का पृष्ठ तनाव $0.06\ N/m$ हो तब $1mm$ व्यास की केशनली में केशकीय उन्नयन होगा $(\theta = 0^o)$ [AFMC 1998]

(a) $1.22\ cm$ (b) $2.44\ cm$ (c) $3.12\ cm$ (d) $3.86\ cm$

Solution : (b) $h = \frac{2T\cos\theta}{rdg}$, [$\theta = 0,\ r = \frac{1}{2}mm = 0.5\times10^{-3}m,\ T = 0.06N/m,\ d = 10^3 kg/m^3,\ g = 9.8\ m/s^2$]

$h = \frac{2\times0.06\times\cos\theta}{0.5\times10^{-3}\times10^3\times9.8} = 0.0244m = 2.44cm$

Problem 26. समान पदार्थ परन्तु असमान त्रिज्याओं की दो केशनलियाँ किसी द्रव में डुबोयी जाती हैं। केशनियों में द्रव स्तम्भों की ऊँचाईयाँ $2.2cm$ व $6.6cm$ हैं तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात होगा [MP PET 1990]

(a) 9 : 1 (b) 1 : 9 (c) 3 : 1 (d) 1 : 3

Solution : (c) चूँकि $h \propto \frac{1}{r}$ $\therefore \frac{h_1}{h_2} = \frac{r_2}{r_1}$ या $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{6.6}{2.2} = \frac{3}{1}$

Problem 27. केशनली का निचला सिरा जल की सतह से $12cm$ नीचे है तथा नली में जल $3cm$ चढ़ता है। नली के निचले सिरे पर वायु का बुलबुला बनाने के लिए $X\ cm$ जल स्तम्भ दाब की आवश्यकता हो तो X होगा [CPMT 1989]

(a) 3 (b) 9 (c) 12 (d) 15

Solution : (d) नली का निचला सिरा नली में जल की सतह से 12 + 3 = 15 cm नीचे है।

अतः आवश्यक दाब = 15 cm जल स्तम्भ

Problem 28. त्रिज्या r वाली केशनली का निचला सिरा ऊर्ध्वाधर जल में डूबा है। केशनली में जल के चढ़ने पर मुक्त ऊष्मा होगी

(a) $+\frac{\pi^2 r^2 h^2}{J} dg$ (b) $+\frac{\pi r^2 h^2 dg}{2J}$ (c) $-\frac{\pi r^2 h^2 dg}{2J}$ (d) $-\frac{\pi r^2 h^2 dg}{J}$

Solution : (b) ऊर्ध्वाधर नली में चढ़े जल की ऊँचाई $h = \frac{2T\cos\theta}{rdg}$

ऊर्ध्वाधर बल $= 2\pi r \times T\cos\theta$

इस बल द्वारा जल स्तम्भ को h ऊँचाई तक ले जाने में किया गया कार्य

$$\Delta W = (2\pi rT\cos\theta)h = (2\pi rh\cos\theta)T = (2\pi rh\cos\theta)\left(\frac{rhdg}{2\cos\theta}\right) = \pi r^2 h^2 dg$$

तथा जल स्तम्भ की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि $\Delta E_p = mg\frac{h}{2}$

जहाँ m द्रव स्तम्भ में चढ़े जल का द्रव्यमान है। $\therefore m = \pi r^2 hd$

अतः, $\Delta E_P = (\pi r^2 hd)\left(\frac{hg}{2}\right) = \frac{\pi r^2 h^2 dg}{2}$

अतः, $\Delta W - \Delta E_p = \frac{\pi r^2 h^2 dg}{2}$

ऊर्जा का $(\Delta W - \Delta E_P)$ भाग श्यान बल व घर्षण बल के विरूद्ध कार्य करने में खर्च हो जाता है तथा ऊष्मा में परिवर्तित हो जाता है। अतः मुक्त ऊष्मा $= \frac{\Delta W - \Delta E_p}{J} = \frac{\pi r^2 h^2 dg}{2J}$

Problem 29. किसी केशनली में जल इस प्रकार चढ़ता है कि पृष्ठ तनाव के कारण ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर लगने वाला बल, द्रव स्तम्भ के भार के कारण लगने वाले $75\times10^{-4} N$ बल से संतुलित हो जाता है। जल का पृष्ठ तनाव $6\times10^{-2} N/m$ हो तो केशनली की आंतरिक परिधि होगी [CPMT 1986, 88]

(a) $1.25\times10^{-2} m$ (b) $0.50\times10^{-2} m$ (c) $6.5\times10^{-2} m$ (d) $12.5\times10^{-2} m$

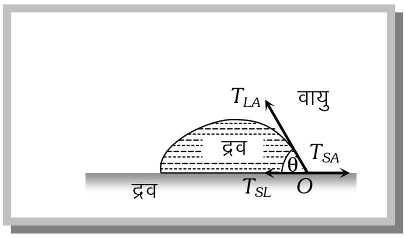
Solution : (d) द्रव स्तम्भ का भार = पृष्ठ तनाव के कारण ऊपर की ओर लगने वाला

$$75\times10^{-4} = 2\pi rT$$

$$\text{परिधि } 2\pi r = \frac{75\times10^{-4}}{T} = \frac{75\times10^{-4}}{6\times10^{-2}} = 0.125 = 12.5\times10^{-2} m$$

बूँद का आकार

द्रव बूँद के रूप में साम्यावस्था में रहेगा या फैल जाएगा यह पृष्ठ तनाव के कारण तीन अंतः सतहों पर लगने वाले बलों की तुलनात्मक शक्ति पर निर्भर करेगा।

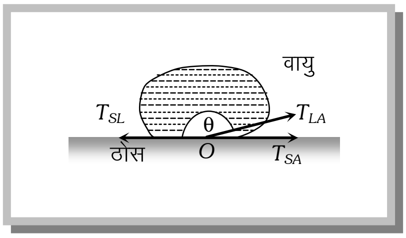


T_{LA} = द्रव-वायु अंतःसतह पर पृष्ठ तनाव, T_{SA} = ठोस-वायु अंतः सतह पर पृष्ठ तनाव

T_{SL} = ठोस-द्रव अतःसतह पर पृष्ठ तनाव, θ = द्रव व ठोस के मध्य पृष्ठ तनाव

अणु की साम्यावस्था के लिए

$$T_{SL} + T_{LA}\cos\theta = T_{SA} \text{ or } \cos\theta = \frac{T_{SA} - T_{SL}}{T_{LA}} \quad .....(i)$$



$T_{SA} > T_{SL}$, तब $\cos\theta$ धनात्मक होगा अर्थात् $0^o < \theta < 90^o$

यह स्थिति तब लागू होगी जब द्रव के अणु दृढ़तापूर्वक ठोस से संलग्न हो।

उदाहरण: (i) काँच पर जल।

(ii) किसी सतह पर केरोसीन तेल।

$T_{SA} < T_{SL}$ तब $\cos\theta$ ऋणात्मक होगा अर्थात् $90^o < \theta < 180^o$.

यह स्थिति तब लागू होगी जब द्रव के अणु आपस में दृढ़तापूर्वक संलग्न हों, जबकि ठोस से कम दृढ़ता से संलग्न हों।

उदाहरण : (i) काँच की सतह पर पारा।

(ii) तैलीय सतह या कमल के फूल की पंखुड़ियों पर जल।

$(T_{SL} + T_{LA}\cos\theta) > T_{SA}$

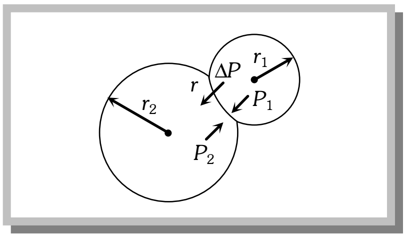
इस स्थिति में, द्रव के अणु साम्यावस्था में नहीं होंगे तथा अंतः सतह पर परिणामी बल का अनुभव करेंगे परिणामस्वरूप द्रव फैल जाएगा।

उदाहरण : (i) स्वच्छ काँच की सतह पर जल।

कुछ महत्वपूर्ण तथ्य व सूत्र

(1) भिन्न-भिन्न त्रिज्या के बुलबुलों का सम्पर्क में आना : यदि छोटे व बड़े बुलबुले की त्रिज्याऐं क्रमशः r_1 व r_2 हों तथा वायुमण्डलीय दाब P_0 हो तो बुलबुलों के आंतरिक दाब $P_1 = P_0 + \frac{4T}{r_1}$ व $P_2 = P_0 + \frac{4T}{r_2}$ होंगे।

$r_1 < r_2 \;\therefore\; P_1 > P_2$



अंतः सतह पर $\Delta P = P_1 - P_2 = 4T\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$ .....(i)

दाब आधिक्य अवतल से उत्तल सतह की ओर होता है। अतः अंतः सतह या सम्पर्क सतह छोटे बुलबुले की ओर अवतल होगी तथा बड़े बुलबुले की ओर उत्तल होगी। यदि अंतःसतह की त्रिज्या r हो तो

$$\Delta P = \frac{4T}{r} \quad .....(ii)$$

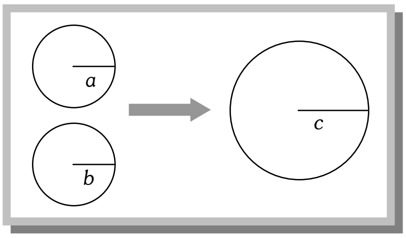
समीकरण (i) व (ii) से $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$

$\therefore$ अंतः सतह की त्रिज्या $r = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$

(2) दो बुलबुलों का संयुक्त होकर एक बुलबुला बनना

(i) माना समतापी अवस्था में 'a' व 'b' त्रिज्या के साबुन के दो बुलबुलों के संयोग से 'c' त्रिज्या का एक बड़ा बुलबुला बनता है।

यदि बाह्य दाब P_0 हो तो बुलबुलों के अंदर दाब



$$P_a = \left(P_0 + \frac{4T}{a}\right),\; P_b = \left(P_0 + \frac{4T}{b}\right) \text{ व } P_c = \left(P_0 + \frac{4T}{c}\right)$$

बुलबुलों के आयतन

$V_a = \frac{4}{3}\pi a^3$, $V_b = \frac{4}{3}\pi b^3$, $V_c = \frac{4}{3}\pi c^3$

अब चूँकि द्रव्यमान संरक्षित रहता है $\mu_a + \mu_b = \mu_c \Rightarrow \frac{P_a V_a}{RT_a} + \frac{P_b V_b}{RT_b} = \frac{P_c V_c}{RT_c}$ $\left[PV = \mu RT, \text{ अर्थात् } \mu = \frac{PV}{RT} \right]$

$\Rightarrow P_a V_a + P_b V_b = P_c V_c$ .....(i) [चूँकि ताप नियत है अतः $T_a = T_b = T_c$]

दाब व आयतन का मान रखने पर,

$$\Rightarrow \left[P_0 + \frac{4T}{a}\right]\left[\frac{4}{3}\pi a^3\right] + \left[P_0 + \frac{4T}{b}\right]\left[\frac{4}{3}\pi b^3\right] = \left[P_0 + \frac{4T}{c}\right]\left[\frac{4}{3}\pi c^3\right]$$

$$\Rightarrow 4T(a^2 + b^2 - c^2) = P_0(c^3 - a^3 - b^3)$$

$\therefore$ द्रव का पृष्ठ तनाव $T = \frac{P_0(c^3 - a^3 - b^3)}{4(a^2 + b^2 - c^2)}$

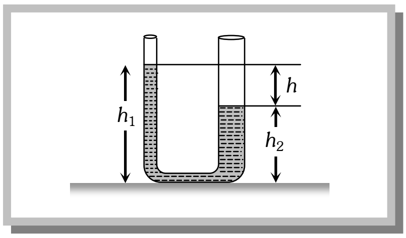
(ii) यदि बुलबुले निर्वात में संयुक्त हों $P_0 = 0$ रखने पर,

$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad \therefore c^2 = a^2 + b^2$

नये बुलबुले की त्रिज्या $= c = \sqrt{a^2 + b^2}$ या $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

(3) असमान त्रिज्याओं (r_1 व r_2) की नलियों वाली U-नली में द्रव स्तम्भों की ऊँचाईयों में अंतर

$$h = h_1 - h_2 = \frac{2T\cos\theta}{dg}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$



(4) काँच की दो प्लेटों के मध्य पानी की पतली पर्त आ जाने पर उन्हें पृथक करने के लिए अधिक परिमाण का बल (F) लगाना पड़ता है, क्योंकि प्लेटों के मध्य पानी की पतली पर्त चारों ओर अवतल हो जाती है और अवतल पृष्ठ की ओर दाब अधिक होता है। अतः प्लेटों को पृथक करने के लिए अधिक बल लगाना पड़ता है।

$F = \frac{2AT}{t}$ जहाँ T= जल का पृष्ठ तनाव, t= पर्त की मोटाई, A = पर्त का क्षेत्रफल।

(5) जब साबुन के बुलबुले को आवेशित किया जाता है तो उस पर बाहय बल लगता है। जिससे उसका आकार बढ़ जाता है।

(6) वह पदार्थ जिनका किसी सतह पर लेप करने से जल सतह को नहीं भिगोता, जलरोधी (water proof) पदार्थ कहलाते हैं। *उदाहरण*: मोम, जलरोधी पदार्थ स्पर्श कोण का मान बढ़ा देते हैं।

(7) कुछ द्रवों के पृष्ठ तनावों के मान

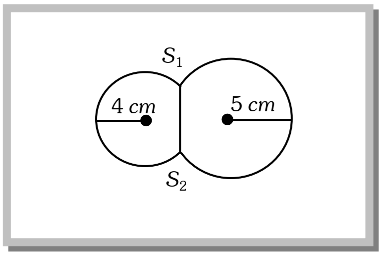
द्रव	पृष्ठ तनाव (*Newton/metre में*)
पारा	0.465
जल	0.075
साबुन का घोल	0.030
ग्लिसरीन	0.063
कार्बन टेट्राक्लोराइड	0.027
एथिल अल्कोहल	0.022

Problem 30. साबुन के घोल के दो बुलबुलों की त्रिज्याऐं r_1 व r_2 हैं। वे समतापी अवस्था में, निर्वात में मिलकर एक बड़ा बुलबुला बनाते हैं। तब बड़े बुलबुले की त्रिज्या होगी [RPET 1999; MP PMT 2001; EAMCET 2003]

(a) $R = (r_1 + r_2)/2$ (b) $R = r_1(r_1 r_2 + r_2)$ (c) $R^2 = r_1^2 + r_2^2$ (d) $R = r_1 + r_2$

Solution : (c) समतापी अवस्था में पृष्ठ ऊर्जा नियत रहेगी $\therefore 8\pi r_1^2 T + 8\pi r_2^2 T = 8\pi R^2 T \Rightarrow R^2 = r_1^2 + r_2^2$

Problem 31. $4cm$ व $5cm$ त्रिज्याओं के दो बुलबुले एक-दूसरे के सम्पर्क में हैं। उभयनिष्ठ सतह S_1S_2 (चित्र में) की त्रिज्या होगी [MP PMT 2002]



(a) 4 cm
(b) 20 cm
(c) 5 cm
(d) 4.5 cm

Solution : (b) उभयनिष्ठ सतह की त्रिज्या $r = \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1} = \frac{5 \times 4}{5 - 4} = 20cm$

Problem 32. वायु का एक बुलबुला तालाब के तली से सतह की ओर आता है। कौनसा कथन सत्य है [Roorkee 2000]

(a) बुलबुला ऊपर की ओर उठता है क्योंकि तली पर दाब, सतह के दाब से कम है
(b) बुलबुला ऊपर की ओर उठता है, क्योंकि तली पर दाब, सतह के दाब से अधिक है
(c) ऊपर आने पर बुलबुले का आकार बढ़ता है
(d) ऊपर आने पर बुलबुले का आकार घटता है

Solution : (b, c)

Problem 33. साबुन के घोल में दो बुलबुलों की त्रिज्याऐं R_1 व R_2 हैं। उनमें निहित वायु के द्रव्यमानों का अनुपात होगा

(a) $\frac{R_1^3}{R_2^3}$ (b) $\frac{R_2^3}{R_1^3}$ (c) $\left(\frac{P + \frac{4T}{R_1}}{P + \frac{4T}{R_2}}\right)\frac{R_1^3}{R_2^3}$ (d) $\left(\frac{P + \frac{4T}{R_2}}{P + \frac{4T}{R_1}}\right)\frac{R_2^3}{R_1^3}$

Solution : (c) $PV = \mu RT$ से,

दिये गये ताप पर, वायु के द्रव्यमानों का अनुपात $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{\left(P + \frac{4T}{R_1}\right)\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\left(P + \frac{4T}{R_2}\right)\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{\left(P + \frac{4T}{R_1}\right)R_1^3}{\left(P + \frac{4T}{R_2}\right)R_2^3}$.

Problem 34. केशनली को द्रव में डुबोकर ऊर्ध्वाधर से 30^o व 60^o के कोण पर झुकाने पर नली में द्रव स्तम्भ की लम्बाई क्रमशः l_1 व l_2 है। l_1 व l_2 में अनुपात होगा

(a) $1 : \sqrt{3}$ (b) $1 : \sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2} : 1$ (d) $\sqrt{3} : 1$

Solution : (a) $l_1 = \frac{h}{\cos\alpha_1}$ और $l_2 = \frac{h}{\cos\alpha_2}$ $\therefore \frac{l_1}{l_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \frac{\cos 60^o}{\cos 30^o} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 1 : \sqrt{3}$

Problem 35. जल का V आयतन काँच की दो प्लेटों के मध्य दबाने पर वह A क्षेत्रफल में फैल जाता है। यदि पृष्ठ तनाव T हो तो प्लेटों को पृथक करने के लिए आवश्यक अभिलम्बवत् बल होगा

(a) $\frac{TA^2}{V}$ (b) $\frac{2TA^2}{V}$ (c) $\frac{4TA^2}{V}$ (d) $\frac{TA^2}{2V}$

Solution : (b) प्लेटों को पृथक करने के लिए आवश्यक बल $F = \frac{2AT}{t} \times \frac{A}{A} = \frac{2TA^2}{(A \times t)} = \frac{2TA^2}{V}$