आवर्त गति

यदि कोई वस्तु एक निश्चित समय के बाद एक निश्चित मार्ग पर बार-बार अपनी गति दोहराती है, तो उसकी गति आवर्त गति कहलाती है तथा वह निश्चित समय जिसके उपरान्त वह अपनी गति दोहराती है, आवर्तकाल कहलाता है।

उदाहरण

(i) पृथ्वी का सूर्य के चारों ओर परिक्रमण (आवर्तकाल 1 वर्ष)

(ii) पृथ्वी का अपनी अक्ष के परितः घूर्णन (आवर्तकाल 1 दिन)

(iii) घड़ी की घण्टे वाली सुई का घूर्णन (आवर्तकाल 12 घंटे)

(iv) घड़ी की मिनट वाली सुई का घूर्णन (आवर्तकाल 1 घंटा)

(v) घड़ी की सेकण्ड वाली सुई का घूर्णन (आवर्तकाल 1 मिनट)

(vi) चंद्रमा का पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमण (आवर्तकाल 27.3 दिन)

कांपनिक अथवा दोलनी गति

यदि कोई वस्तु आवर्त गति में एक ही मार्ग पर किसी निश्चित बिन्दु के इधर-उधर गति करती है, तो वस्तु की गति को कांपनिक अथवा दोलनी गति कहते हैं। इसमें वस्तु माध्य स्थिति के दोनों ओर निश्चित सीमा तक जाकर वापस लौट आती है।

उदाहरण

(i) सरल लोलक की गति

(ii) स्वरित्र द्विभुज की भुजाओं की गति

(iii) स्प्रिंग पर लटके हुए द्रव्यमान की ऊर्ध्वाधर दिशा में गति

(iv) U आकार की नली में द्रव की ऊर्ध्वाधर दिशा में गति

❑ सभी कांपनिक गतियाँ निश्चित रूप से आवर्ती होती हैं, परन्तु कोई आवर्ती गति अनिवार्य रुप से दोलनी गति नहीं होती।

उदाहरण के लिए पृथ्वी का सूर्य के चारों ओर परिक्रमण यद्यपि आवर्ती गति है, परंतु यह कांपनिक गति नहीं है क्योंकि इसमें माध्य स्थिति के दोनों ओर गति करने की शर्त पूरी नहीं होती ।

महत्वपूर्ण परिभाषाएँ

(1) आवर्तकाल : एक कंपन अथवा दोलन पूरा करने में लगा समय वस्तु का दोलन काल कहलाता है। इसे T से व्यक्त किया जाता है। आवर्तकाल का मात्रक सेकण्ड तथा विमा $[M^0L^0T^1]$ है।

(2) आवृत्ति : एक सेकण्ड में वस्तु जितने कंपन पूर्ण करती है उसे उस वस्तु की आवृत्ति कहते है इसे n से व्यक्त किया जाता है।

आवृत्ति का मात्रक सेकण्ड$^{-1}$ अथवा हर्ट्ज तथा विमा $[M^0L^0T^{-1}]$ है।

$$\text{आवृत्ति} = \frac{1}{\text{आवर्तकाल}} \quad \text{अर्थात्}\ n = \frac{1}{T}$$

(3) कोणीय आवृत्ति : आवर्त गति करते हुये कण की आवृत्ति को 2π से गुणा करने पर कोणीय आवृत्ति प्राप्त होती है। इसे ω से व्यक्त करते हैं। इसका मात्रक भी सेकण्ड$^{-1}$ तथा विमा $[M^0L^0T^{-1}]$ है।

$$\text{कोणीय आवृत्ति}\ \omega = 2\pi n$$

वृत्तीय गति में ω का मात्रक रेडियन/सेकण्ड भी प्रयोग में लाया जाता है वहाँ पर ω को कोणीय वेग कहते हैं।

(4) विस्थापन : आवर्तगति में वह राशि जो माध्य बिन्दु के सापेक्ष कण की तात्क्षणिक स्थिति को व्यक्त करती है। सामान्यतः विस्थापन कहलाती है।

उदाहरण : (i) स्प्रिंग से लटके द्रव्यमान की आवर्त गति में इसका मध्यावस्था से विचलन ही विस्थापन है।

(ii) ध्वनि तरंगों के संचरण में माध्यम के किसी बिन्दु पर दाब में परिवर्तन विस्थापन को व्यक्त करता है।

(iii) विद्युत चुंबकीय तरंगों के संचरण में विद्युत क्षेत्र तथा चुंबकीय क्षेत्र आवर्ती रुप से बदलते हैं। इन्हें विस्थापन कहते हैं।

(5) आयाम : दोलनी गति में वस्तु की साम्य स्थिति से एक ओर अधिकतम विस्थापन को आयाम कहते हैं। इसे a द्वारा व्यक्त करते हैं। इसका मात्रक मीटर तथा विमा $[L]$ है।

(6) कला कोण या कला : वह भौतिक राशि जिसके द्वारा आवर्तगति कर रहे कण की साम्यावस्था से स्थिति तथा उसकी गति की दिशा का बोध होता है कला कहलाती है।

$$y = a\sin\theta = a\sin(\omega t + \phi_0)$$

उपरोक्त समीकरण में प्रदर्शित कोण θ अथवा $(\omega t + \phi_0)$ कण की कला को प्रदर्शित करते हैं।

(i) प्रारंभिक कला : गत्यारंभ में कण की कला प्रारम्भिक कला कहलाती है।

$\theta = \omega t + \phi_0$ में $t = 0$ शून्य रखने पर, $\theta = \phi_0$ अर्थात यहाँ ϕ_0 प्रारम्भिक कला है।

(ii) समान कला : कंपन करते हुये दो कण किसी क्षण समान स्थिति पर हों एवं उनकी गति की दिशा भी समान हो तो वे समान कला में कहे जाते हैं। दो कंपन करने वाले कणों की कला समान होगी, यदि

उनका कलातंर π का समगुणक हो

अथवा उनका मार्गान्तर $\lambda/2$ का समगुणक हो

अथवा उनका समयांतर $T/2$ का समगुणक हो।

(iii) विपरीत कला : कंपन करते हुये दो कण यदि साम्यावस्था पर विपरीत दिशा में गतिशील हो तो वे विपरीत कला में कहे जाते हैं।

दो कण विपरीत कला में होंगे यदि

उनका कलांतर π का विषम गुणक हो (अर्थात् $\pi, 3\pi, 5\pi$ ....)

अथवा उनका मार्गान्तर $\lambda/2$ का विषम गुणक हो (अर्थात् $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2$ ....)

अथवा उनका समयांतर $T/2$ का विषम गुणक हो (अर्थात् $T/2, 3T/2, 5T/2$ ....)

(iv) कलांतर : यदि दो सरल आवर्त गतियाँ क्रमशः $y_1 = a\sin(\omega t + \phi_1)$ तथा $y_2 = a\sin(\omega t + \phi_2)$ द्वारा व्यक्त होती है

तो इनके बीच का कलांतर $\Delta\phi = (\omega t + \phi_2) - (\omega t + \phi_1) = \phi_2 - \phi_1$

सरल आवर्त गति

सरल आवर्त गति में वस्तु अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर सरल रेखा में इस प्रकार आवर्त गति करती है कि इसका त्वरण प्रत्येक स्थिति में कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा त्वरण की दिशा सदैव माध्य स्थिति की ओर होती है।

विशेषताएँ

(i) गति एक निश्चित बिन्दु के दोनों ओर सरल रेखा में होनी चाहिए।

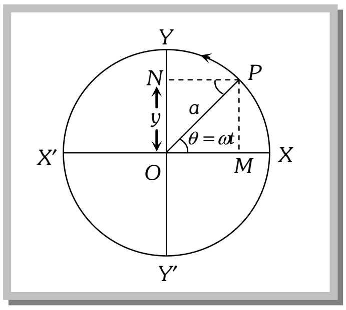
(ii) गति आवर्ती होनी चाहिए अर्थात वस्तु को एक निश्चित समय के बाद पुनः अपनी माध्य स्थिति से गुजरना चाहिए।

(iii) वस्तु पर लगने वाला बल, माध्य स्थिति से वस्तु के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होना चाहिए तथा इसकी दिशा माध्य स्थिति की ओर होनी चाहिए अर्थात् $F \propto -y$

सरल आवर्त गति में विस्थापन

सरल आवर्त गति करते हुये कण की दिए गए क्षण पर माध्य स्थिति से दूरी उसका विस्थापन कहलाती है। एकसमान वृत्तीय गति करते हुये कण का लम्बपाद, वृत्त के व्यास पर सरल आवर्त गति करता है।

चित्र में कण P वृत्तीय मार्ग $XYX'Y'$ पर गति करता है जबकि इसका लम्बपाद YOY' अक्ष पर सरल आवर्त गति करता है।



Y अक्ष पर होने वाली सरल आवर्त गति हेतु विस्थापन का समीकरण

$$y = a \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \quad y = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

$$\Rightarrow \quad y = a \sin 2\pi n t$$

$$\Rightarrow \quad y = a \sin (\omega t \pm \phi)$$

यहाँ a = आयाम
ω = कोणीय आवृत्ति
n = आवृत्ति
T = आवर्तकाल
ϕ = प्रारंभिक कला
t = तात्क्षणिक समय

बिन्दु P का लम्बपाद X-अक्ष पर भी सरल आवर्त गति करता है।

$$x = a \cos (\omega t \pm \phi)$$

$$\Rightarrow \quad x = a \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \pm \phi\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = a \cos (2\pi n t \pm \phi)$$

Important points

(i) $y = a \sin \omega t$ उस कण की सरल आवर्त गति का समीकरण है, जो साम्यावस्था से अपनी गति प्रारंभ करता है।

(ii) $y = a \cos \omega t$ उस कण की सरल आवर्त गति का समीकरण है जो आयाम की स्थिति से अपनी गति प्रारम्भ करता है।

(iii) $y = a \sin (\omega t \pm \phi)$ उस कण की सरल आवर्त गति का समीकरण है जो आयाम की स्थिति से ϕ कोण कला में आगे अथवा पीछे है।

(iv) विस्थापन की दिशा सदैव माध्य स्थिति से दूर की ओर होती है, चाहे कण माध्य स्थिति की ओर जा रहा हो अथवा माध्य स्थिति से दूर जा रहा हो।

(v) साम्यावस्था से t समय पश्चात् अथवा $\theta (= \omega t)$ कला पर कण का विस्थापन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

$$y = a \sin \theta = a \sin \omega t = a \sin \left(\frac{2\pi}{T}\right) t$$

यदि $\theta = \omega t = \pi / 2$ तब $y = a \sin \pi / 2 = a$

अथवा $t = \frac{T}{4}$ तब $y = a \sin \left(\frac{2\pi}{T}\right) t \Rightarrow y = a \sin \left(\frac{2\pi}{T}\right) \frac{T}{4} = a \sin \frac{\pi}{2} = a$

इसी प्रकार $\theta = \pi$ या $t = T/2$ की स्थिति में $y = 0$ होगा।

Problem 1. सरल आवर्त गति करते हुए किसी कण का आवर्तकाल T तथा आयाम A है। कण को $x = A$ से $x = A/2$ तक पहुँचने में लगा समय होगा [CBSE PMT 1992; SCRA 1996]

(a) $T/6$ (b) $T/4$ (c) $T/3$ (d) $T/2$

Solution : (a) चूँकि सरल आवर्त गति आयाम से प्रारंभ होती है अतः $y = a \cos \omega t$ से,

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = A \cos \frac{2\pi}{T} t \quad \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{T} t \quad \Rightarrow t = \frac{T}{6}$$

Problem 2. एक m = 100 ग्राम संहति वाले पिण्ड को एक हल्की स्प्रिंग के एक सिरे से जोड़ दिया जाता है। स्प्रिंग एक घर्षण विहीन क्षैतिज टेबिल पर दोलन करती है। दोलनों का आयाम 0.16 मीटर और आवर्तकाल 2 सेकण्ड है। प्रारंभ में $t = 0$ सेकण्ड पर जब पिण्ड को छोड़ा जाता है, इसका विस्थापन x = 0.16 मीटर है, तो किसी समय (t) पर पिण्ड के विस्थापन का सूत्र होगा

[MP PMT 1995]

(a) $x = 0.16 \cos(\pi t)$ (b) $x = -0.16 \cos(\pi t)$ (c) $x = 0.16 \cos(\pi t + x)$ (d) $x = -0.16 \cos(\pi t + x)$

Solution : (b) उपरोक्त प्रश्न में वर्णित स्थिति हेतु मानक समीकरण $x = a\cos\frac{2\pi}{T}t$ में $a = 0.6$ व $T = 2$ सेकण्ड रखने पर

$x = -0.16 \cos(\pi t)$

Problem 3. सरल आवर्त गति करने वाले कण की गति का समीकरण $x = 0.01 \sin 100\,\pi(t + 0.05)$ है यहाँ x मीटर में तथा t से. में है। इस कण का आवर्तकाल होगा

(a) 0.01 सेकण्ड (b) 0.02 सेकण्ड (c) 0.1 सेकण्ड (d) 0.2 सेकण्ड

Solution : (b) मानक समीकरण $y = a\sin(\omega t + \phi)$ से दिये गये समीकरण की तुलना करने पर,

$\omega = 100\pi$ अतः $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0.02$ सेकण्ड

Problem 4. दो सरल आवर्त गतियाँ जिनके समीकरण $x = a\sin(\omega t - \alpha)$ तथा $y = b\cos(\omega t - \alpha)$ द्वारा प्रदर्शित की जा रही हैं, इनके बीच कलांतर होगा

(a) 0° (b) α° (c) 90° (d) 180°

Solution : (c) $x = a\sin(\omega t - \alpha)$ तथा $y = b\cos(\omega t - \alpha) = b\sin\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

अब दोनों समीकरणों की कलाओं का अन्तर $= \left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) - (\omega t - \alpha) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

सरल आवर्त गति में वेग

सरल आवर्त गति करते हुये कण की स्थिति का समय के सापेक्ष अवकलन कण का वेग प्रदान करता है।

साम्यावस्था से प्रारंभ होने वाली सरल आवर्त गति हेतु विस्थापन का समीकरण $y = a\sin\omega t$

अतः $v = \frac{dy}{dt} = a\omega\cos\omega t = a\,\omega\sqrt{(1 - \sin^2\omega t)} = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$

वेग के समीकरण

कला के पदों में	$v = a\omega\cos\theta$
समय के पदों में	$v = a\omega\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$
विस्थापन के पदों में	$v = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$

Important points

(i) $v_{max} = a\omega$ जबकि $\theta = 0$ अथवा $t = 0$ अथवा $y = 0$

अर्थात् सरल आवर्त गति करते हुए कण का वेग साम्यावस्था पर अधिकतम $(a\omega)$ होता है।

(ii) $v_{min} = 0$ जबकि $\theta = \frac{\pi}{2}$ या $\frac{3\pi}{2}$ अथवा $t = \frac{T}{4}$ या $\frac{3T}{4}$ अथवा $y = \pm a$

अर्थात् सरल आवर्त गति करते हुए कण का वेग आयाम पर न्यूनतम (शून्य) होता है।

(iii) वेग की दिशा कण की स्थिति के अनुसार माध्य स्थिति से दूर की ओर अथवा माध्य स्थिति की ओर होती है।

Problem 5. सरल आवर्त गति करते हुये कण की कोणीय आवृत्ति 2 रेडियन/से. तथा आयाम 60 *mm* है। कण का वेग कितना होगा जबकि यह साम्यावस्था से 20 *mm* की दूरी पर है [AFMC 1998]

(a) 40 *mm/sec* (b) 60 *mm/sec* (c) 113 *mm/sec* (d) 120 *mm/sec*

Solution : (c) $v = \omega\sqrt{a^2 - y^2} = 2\sqrt{(60)^2 - (20)^2} = 113\ mm/sec$

Problem 6. किसी कण की सरल आवर्त गति का समीकरण y = 0.30 sin (220 t + 0.64) मीटर है। तब कण की आवृत्ति तथा अधिकतम वेग क्रमशः होंगे [AFMC 1998]

(a) 35 हर्ट्ज, 66 मी/से. (b) 45 हर्ट्ज, 66 मी/से. (c) 58 हर्ट्ज, 113 मी/से. (d) 35 हर्ट्ज, 132 मी/से.

Solution : (a) मानक समीकरण $y = a\sin(\omega t + \phi)$ से दी गई समीकरण की तुलना करने पर, a = 0.30 तथा ω = 220

अतः $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{220}{2\pi}$ = 35 हर्ट्ज तथा $v_{max} = a\omega = 0.3 \times 220 = 66$ मी/सै.

Problem 7. एक कण माध्य स्थिति से सरल आवर्त गति प्रारम्भ करता है जिसका आयाम A तथा आवर्तकाल T है। किसी एक समय इसकी गति अधिकतम गति की आधी होती है। कण का विस्थापन होगा

(a) $A/2$ (b) $A\sqrt{2}$ (c) $A\sqrt{3}/2$ (d) $2A/\sqrt{3}$

Solution : (c) $v = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$ दिया है $v = \frac{v_{max}}{2} = \frac{a\omega}{2}$

$\therefore \frac{a\omega}{2} = \omega\sqrt{a^2 - y^2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = a^2 - y^2 \Rightarrow y = A\sqrt{3}/2$

Problem 8. एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है। इसकी गति का समीकरण $x = 5\sin(4t - \frac{\pi}{6})$ है जहाँ कण का विस्थापन x है। यदि कण का विस्थापन 3 इकाई हो तो इसका वेग होगा [MP PMT 1994]

(a) $2\pi/3$ (b) $5\pi/6$ (c) 20 (d) 16

Solution : (d) दिये गये समीकरण की मानक समीकरण $y = a\sin(\omega t - \phi)$ से तुलना करने पर, $\omega = 4, a = 5,$

अतः कण का वेग $v = \omega\sqrt{a^2 - y^2} = 4\sqrt{5^2 - 3^2} = 16$

Problem 9. एक सरल लोलक $x = 0$ के दोनों ओर सरल आवर्त गति कर रहा है जिसका आयाम A तथा दोलनकाल T है। $x = \frac{A}{2}$ पर लोलक की चाल होगी [MP PMT 1987]

(a) $\frac{\pi A\sqrt{3}}{T}$ (b) $\frac{\pi A}{T}$ (c) $\frac{\pi A\sqrt{3}}{2T}$ (d) $\frac{3\pi^2 A}{T}$

Solution : (a) $v = \omega\sqrt{a^2 - y^2} \Rightarrow v = \frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} = \frac{\pi A\sqrt{3}}{T}$

Problem 10. एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है इसका आयाम 2 मीटर तथा आवर्तकाल 2 सेकण्ड हो तो इस कण का अधिकतम वेग होगा [MP PMT 1985]

(a) 6π मी/से. (b) $\sqrt{2}\,\pi$ मी/से. (c) 2π मी./से. (d) 4π मी/से.

Solution : (c) $v_{max} = a\omega = \frac{a2\pi}{T} = \frac{2.2\pi}{2} = 2\pi$

Problem 11. एक सरल आवर्त गति करने वाले कण का आयाम a तथा आवर्तकाल T है। इसका अधिकतम वेग होगा [MP PMT 1985]

(a) $\frac{4a}{T}$ (b) $\frac{2a}{T}$ (c) $2\pi\sqrt{a/T}$ (d) $\frac{2\pi a}{T}$

Solution : (d) $v_{max} = a\ \omega = \frac{a2\pi}{T}$

Problem 12. सरल आवर्त गति करते कण का आवर्तकाल 6 सेकण्ड तथा आयाम 3 सेमी है। इसका अधिकतम वेग सेमी/सेकण्ड में होगा

[CPMT 1976]

(a) $\pi/2$ (b) π (c) 2π (d) 3π

Solution : (b) $v_{max} = a\omega = a\left(\frac{2\pi}{T}\right) = 3\left(\frac{2\pi}{6}\right) \Rightarrow v_{max} = \pi$

Problem 13. 5 ग्राम का एक पिण्ड सरल आवर्त गति करता है तथा इसका आयाम 10 सेमी है, इसका अधिकतम वेग 100 सेमी/सेकण्ड है। इसका वेग 50 सेमी/सेकण्ड किस विस्थापन पर होगा

(a) 5 सेमी (b) $5\sqrt{2}$ सेमी (c) $5\sqrt{3}$ सेमी (d) $10\sqrt{2}$ सेमी

Solution : (c) $v_{max} = a\omega =$ 100 सेमी./सेकण्ड तथा $a = 10$ सेमी अतः $\omega = \frac{v_{max}}{a} = 10$ रेडियन/सेकण्ड

$\therefore\ v = \omega\sqrt{a^2 - y^2} \Rightarrow 50 = 10\sqrt{10^2 - y^2} \Rightarrow y = 5\sqrt{3}$ सेमी.

सरल आवर्त गति में त्वरण

सरल आवर्त गति करते हुये कण का त्वरण, उस स्थिति पर कण के वेग का समय के साथ अवकलन करने पर प्राप्त होता है। अर्थात् उसके वेग परिवर्तन की दर त्वरण कहलाती है।

$$A = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(a\omega\cos\omega t) = -\omega^2 a\sin\omega t = -\omega^2 y \qquad (\text{चूँकि } y = a\sin\omega t)$$

त्वरण के समीकरण

कला के पदों में	$A = -\omega^2 a\sin\theta$
समय के पदों में	$A = -\omega^2 a\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$
विस्थापन के पदों में	$A = -\omega^2 y$

Important points

(i) सरल आवर्त गति में त्वरण ($\omega^2 y$) का मान नियत नहीं होता अतः स्थानांतरीय गति के समीकरणों का प्रयोग नहीं किया जा सकता।

(ii) $|A_{max}| = \omega^2 a$ जबकि $\theta = \frac{\pi}{2}$ या $\frac{3\pi}{2}$ अथवा $t = \frac{T}{4}$ या $\frac{3T}{4}$ अथवा $y = \pm a$

अर्थात् सरल आवर्त गति करते हुए कण पर आयाम की स्थिति पर अधिकतम ($\omega^2 a$) त्वरण कार्य करता है

(iii) $|A_{min}| = 0$ जबकि $\theta = 0$ अथवा $t = 0$ अथवा $y = 0$

अर्थात् सरल आवर्त गति करते हुए कण पर साम्यावस्था पर न्यूनतम (शून्य) त्वरण कार्य करता है

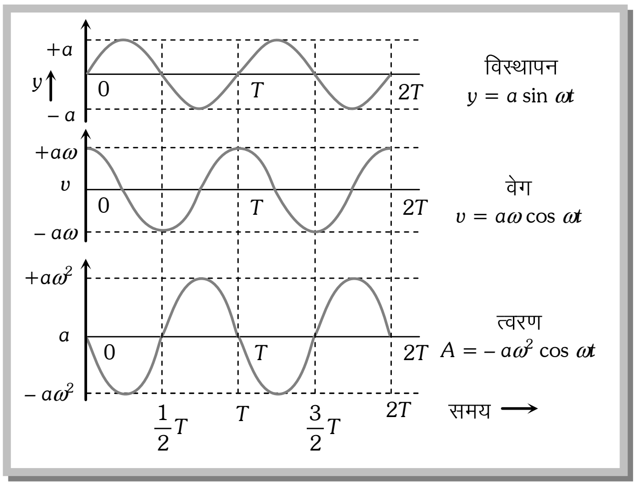
(iv) त्वरण की दिशा सदैव साम्यावस्था की ओर होती है अतः यह सदैव विस्थापन के विपरीत कार्य करता है। अर्थात् ($A \propto -y$)

विस्थापन, वेग तथा त्वरण का तुलनात्मक विवेचन

विस्थापन समीकरण $y = a \sin \omega t$

वेग का समीकरण $v = a\omega \cos \omega t = a\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

त्वरण का समीकरण $A = -a\omega^2 \sin \omega t = a\omega^2 \sin(\omega t + \pi)$



उपरोक्त समीकरणों तथा ग्राफ के आधार पर महत्वपूर्ण बिन्दु

(i) तीनों राशियाँ विस्थापन, वेग तथा त्वरण सरल आवर्त रुप से परिवर्तित होती हैं जिनके आवर्तकाल भी समान हैं।

(ii) वेग का आयाम, विस्थापन के आयाम का ω गुना है।

(iii) त्वरण का आयाम, वेग के आयाम का ω^2 गुना है।

(iv) सरल आवर्त गति में वेग विस्थापन से कला में 90° आगे है।

(v) सरल आवर्त गति में त्वरण वेग से कला में 90° आगे है।

(vi) सरल आवर्त गति में त्वरण विस्थापन से कला में 180° आगे है।

(viii) साम्य तथा आयाम की अवस्था पर विभिन्न भौतिक राशियाँ :

भौतिक राशि	साम्यावस्था ($y = 0$)	आयाम की अवस्था ($y = \pm a$)
विस्थापन $y = a \sin \omega t$	न्यूनतम (शून्य)	अधिकतम (a)
वेग $v = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$	अधिकतम ($a\omega$)	न्यूनतम (शून्य)
त्वरण $\lvert A \rvert = \omega^2 y$	न्यूनतम (शून्य)	अधिकतम ($\omega^2 a$)

सरल आवर्त गति में ऊर्जा

सरल आवर्त गति करते हुए कण में दो प्रकार की ऊर्जायें पाई जाती हैं : स्थितिज ऊर्जा तथा गतिज ऊर्जा

(1) स्थितिज ऊर्जा : सरल आवर्त गति करते हुए कण को साम्यावस्था से विस्थापित करने हेतु प्रत्यानयन बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है यह स्थितिज ऊर्जा के रुप में संचित हो जाता है।

यदि प्रत्यानयन बल $F = -ky$ तब कण को विस्थापित करने हेतु कार्य $U = -\int dW = -\int_0^y F\,dy = \int_0^y ky\,dy = \frac{1}{2}ky^2$

अतः स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\theta$ [चूंकि $\omega^2 = \frac{k}{m}$ तथा $y = a \sin \omega t$]

स्थितिज ऊर्जा के समीकरण

कला के पदों में	$U = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\theta$
समय के पदों में	$U = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$
विस्थापन के पदों में	$U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$

Important points

(i) $U_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$ जबकि $y = \pm a$ अथवा $\theta = \frac{\pi}{2}$ या $\frac{3\pi}{2}$ अथवा $t = \frac{T}{4}$ या $\frac{3T}{4}$

अर्थात् सरल आवर्त गति करते हुए कण की स्थितिज ऊर्जा आयाम की अवस्था पर अधिकतम तथा कुल ऊर्जा $(\frac{1}{2}m\omega^2 a^2)$ के बराबर होती है।

(ii) $U_{min} = 0$ जबकि $y = 0$ अथवा $\theta = 0$ अथवा $t = 0$

अर्थात् सरल आवर्त गति करते कण की स्थितिज ऊर्जा साम्यावस्था पर न्यूनतम (शून्य) होती है।

(2) गतिज ऊर्जा : कण के वेग के कारण उसमें पाई जाने वाली ऊर्जा गतिज ऊर्जा कहलाती है।

गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - y^2)$ [चूँकि $v = a\omega\cos\omega t$ तथा $v = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$]

गतिज ऊर्जा के समीकरण

कला के पदों में	$K = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\cos^2\theta$
समय के पदों में	$K = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$
विस्थापन के पदों में	$K = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - y^2)$

Important points

(i) $K_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$ जबकि $y = 0$ अथवा $\theta = 0$ अथवा $t = 0$

अर्थात् सरल आवर्त गति करते हुए कण की गतिज ऊर्जा साम्यावस्था पर अधिकतम तथा कुल ऊर्जा $(\frac{1}{2}m\omega^2 a^2)$ के बराबर होती है।

(ii) $K_{min} = 0$ जबकि $y = \pm a$ अथवा $\theta = \frac{\pi}{2}$ या $\frac{3\pi}{2}$ अथवा $t = \frac{T}{4}$ या $\frac{3T}{4}$

अर्थात् सरल आवर्त गति करते कण की गतिज ऊर्जा आयाम की अवस्था पर न्यूनतम (शून्य) होती है।

(3) कुल ऊर्जा : सरल आवर्त गति करते हुए कण की सम्पूर्ण यांत्रिक ऊर्जा = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा

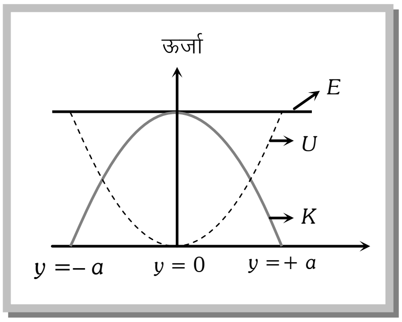
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$$

अर्थात् कुल ऊर्जा सदैव नियत रहती है तथा प्रत्येक स्थिति में समान रहती है।

(4) ऊर्जा स्थिति ग्राफ : गतिज ऊर्जा $(K) = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - y^2)$

स्थितिज ऊर्जा $(U) = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$

कुल ऊर्जा $(E) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$



ग्राफ से स्पष्ट है कि

(i) गतिज ऊर्जा का मान साम्यावस्था पर अधिकतम जबकि आयाम की स्थिति पर न्यूनतम होता है।

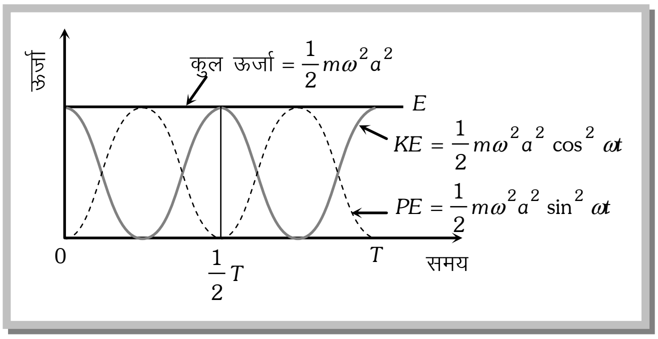
(ii) स्थितिज ऊर्जा का मान साम्यावस्था पर न्यूनतम जबकि आयाम की स्थिति पर अधिकतम होता है।

(iii) कुल ऊर्जा का मान सदैव नियत रहता है।

(5) गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{4} m\omega^2 a^2 (1 + \cos 2\omega t) = \frac{1}{2} E(1 + \cos \omega' t)$

स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{4} m\omega^2 a^2 (1 - \cos 2\omega t) = \frac{1}{2} E(1 - \cos \omega' t)$

यहाँ $\omega' = 2\omega$ तथा $E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$



अर्थात् सरल आवर्त गति में स्थितिज तथा गतिज ऊर्जा के दोलन की आवृत्ति, विस्थापन की आवृत्ति की दो गुनी होती है।

अर्थात् $n' = 2n$ तथा $T' = T/2$

जैसा कि चित्र से स्पष्ट है कि जितने समय में सरल आवर्त गति करता हुआ कण अपना एक कम्पन पूर्ण करता है। उतने ही समय में गतिज ऊर्जाएँ तथा स्थितिज ऊर्जाएँ दो कम्पन पूरे कर लेती हैं।

Problem 14. कोई कण f आवृत्ति से सरल आवर्त गति कर रहा है। इसकी गतिज ऊर्जा के स्थितिज ऊर्जा में बदलने की आवृत्ति होगी [MP PET 2000]

(a) $f/2$ (b) f (c) $2f$ (d) $4f$

Solution : (c)

Problem 15. जब सरल आवर्त गति करते हुए कण की स्थितिज ऊर्जा उसकी अधिकतम स्थितिज ऊर्जा की एक चौथाई है, तब कण का साम्य स्थिति से विस्थापन उसके आयाम के पदों में होगा

[CBSE PMT 1993; MP PMT 1994; MP PET 1995, 96; MP PMT 2000]

(a) $a/4$ (b) $a/3$ (c) $a/2$ (d) $2a/3$

Solution : (c) प्रश्नानुसार, स्थितिज ऊर्जा = $\frac{1}{4}$ अधिकतम ऊर्जा $\Rightarrow \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} m\omega^2 a^2) \Rightarrow y^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow y = a/2$

Problem 16. 10 ग्राम द्रव्यमान का एक कण 0.5 मी आयाम तथा 10 रेडियन/सेकण्ड की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति कर रहा है। दोलन के दौरान कण पर लगने वाले बल का अधिकतम मान होगा [MP PMT 2000]

(a) $25\,N$ (b) $5\,N$ (c) $2.5\,N$ (d) $0.5\,N$

Solution : (d) अधिकतम बल = द्रव्यमान × अधिकतम त्वरण = $m \times \omega^2 a = 10 \times 10^{-3} \times (10)^2 (0.5) = 0.5\,N$

Problem 17. एक कमरे में एक वस्तु 5 मीटर की दूरी पर स्थित दो दीवारों के लंबवत् 20 मी/से. के वेग से चल रही है। घर्षण नहीं है और दीवार से संघट्ट प्रत्यास्थ है। वस्तु की गति [MP PMT 1999]

(a) आवर्ती नहीं है (b) आवर्ती है किन्तु सरल आवर्ती नहीं है

(c) आवर्ती है और सरल आवर्ती है (d) परिवर्ती आवर्तकाल के साथ आवर्ती है

Solution : (b) प्रश्नानुसार दी गई गति में आवर्तकाल निश्चित है परन्तु इसमें $F \propto -y$ स्थिति का पालन नही होता, जो कि सरल आवर्त गति की अनिवार्य शर्त है अतः वस्तु की गति आवर्ती है किन्तु सरल आवर्ती नहीं है।

Problem 18. दो कण समान आयाम तथा समान आवृत्ति के साथ एक सीधी रेखा में सरल आवर्त गति कर रहे हैं। जब दोनों कण एक दूसरे को पार करके विपरीत दिशा में जाते हैं तब उनका विस्थापन आयाम का आधा होता है। इन कणों के बीच कलान्तर होगा [MP PMT 1999]

(a) 30^0 (b) 60^0 (c) 90^0 (d) 120^0

Solution : (d) माना दो सरल आवर्त गतियाँ हैं : $y = a\sin\theta$ तथा $y = a\sin(\theta+\phi)$

प्रथम कण के लिए $\frac{a}{2} = a\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$ तथा $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

द्वितीय कण के लिए $\frac{a}{2} = a\sin(\theta+\phi) \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin(\theta+\phi) = (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)$ .....(i)

$\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ के मान समीकरण (i) में रखने पर,

$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\cos\phi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi\right) \Rightarrow 1 - \cos\phi = \sqrt{3}\sin\phi \Rightarrow (1-\cos\phi)^2 = 3\sin^2\phi \Rightarrow (1-\cos\phi)^2 = 3(1-\cos^2\phi)$

हल करने पर $\cos\phi = +1$ या $-1/2$ अतः $\phi = 0$ या $\phi = 120°$

$\phi = 0$ संभव नहीं है अतः $\phi = 120°$

Problem 19. मध्यमान स्थिति से 3 सेमी दूरी पर सरल आवर्त गति करते हुये एक कण का त्वरण 12 सेमी/सेकण्ड^2 है। उसका आवर्त काल होगा [MP PET 1996; MP PMT 1997]

(a) 0.5 सेकण्ड (b) 1.0 सेकण्ड (c) 2.0 सेकण्ड (d) 3.14 सेकण्ड

Solution : (d) $A = \omega^2 y$ अतः $\omega = \sqrt{A/y} = \sqrt{12/3} = 2$ अतः आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi = 3.14$ सेकण्ड

Problem 20. एक 10 ग्राम द्रव्यमान वाली वस्तु सीधी रेखा में सरल आवर्त गति करती है उसका आवर्तकाल 2 सेकण्ड और कम्पन विस्तार 10 सेमी है, तो संतुलन की स्थिति से 5 सेमी दूर पर उसकी गतिज ऊर्जा होगी [MP PMT 1996]

(a) $37.5\ \pi^2$ अर्ग (b) $3.75\ \pi^2$ अर्ग (c) $375\ \pi^2$ अर्ग (d) $0.375\ \pi^2$ अर्ग

Solution : (c) गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - y^2) = \frac{1}{2}10\frac{4\pi^2}{4}(10^2 - 5^2) = 375\pi^2$ अर्ग

Problem 21. सरल आवर्त गति करते हुए कण की कुल ऊर्जा E है। जब इसका विस्थापन आयाम का आधा होता है तब इसकी गतिज ऊर्जा होगी [RPET 1996]

(a) $\frac{E}{2}$ (b) $\frac{E}{4}$ (c) $\frac{3E}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{3}E}{4}$

Solution : (c) गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - y^2)$ चूँकि $y = a/2$ अतः गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - \frac{a^2}{4}) = \frac{3E}{4}$

Problem 22. सरल आवर्त गति करती हुयी वस्तु का अधिकतम त्वरण 24 मी/से^{2} और अधिकतम वेग 16 मी/से. है। सरल आवर्त गति का आयाम होगा [MP PMT 1995]

(a) 32/3 मीटर (b) 3/32 मीटर (c) 1024/9 मीटर (d) 64/9 मीटर

Solution : (a) अधिकतम त्वरण $\omega^2 a = 24$ .....(i) तथा अधिकतम वेग $a\omega = 16$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर, $\omega = 3/2$ हर्ट्ज तथा $a = 32/3$ मीटर

Problem 23. सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है y (सेमी) = $\sin \frac{\pi}{2}(\frac{t}{2}+\frac{1}{3})$ कण का अधिकतम त्वरण होगा [AMU 1995]

(a) 5.21 सेमी / से² (b) 3.62 सेमी / से² (c) 1.81 सेमी / से² (d) 0.62 सेमी / से²

Solution : (d) मानक समीकरण $y = a\sin(\omega t + \phi)$ से दिए हुए समीकरण की तुलना करने पर $a = 1$ तथा $\omega = \pi/4$

अतः अधिकतम त्वरण $= \omega^2 a = \frac{\pi^2}{16}$ = 0.62 सेमी / सै²

Problem 24. सरल आवर्त गति करते हुए कण की माध्य स्थिति से x दूरी पर स्थितिज ऊर्जा समानुपाती होगी [Roorkee 1992]

(a) $\sqrt{x}$ (b) x (c) x^2 (d) x^3

Solution : (c)

Problem 25. सरल आवर्त गति करते हुए कण की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाएँ किस स्थिति पर समान होंगी [MP PMT 1987; CPMT 1990]

(a) $a/2$ (b) $a\sqrt{2}$ (c) $a/\sqrt{2}$ (b) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Solution : (c) प्रश्नानुसार गतिज ऊर्जा = स्थितिज ऊर्जा $\Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2(a^2-y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2y^2 \Rightarrow a^2-y^2 = y^2 \Rightarrow y = a/\sqrt{2}$

Problem 26. सरल आवर्त गति करते हुए कण की कला जब $\pi/2$ होती है तब होगा [MP PET 1985]

(a) अधिकतम वेग (b) अधिकतम त्वरण (c) न्यूनतम ऊर्जा (d) अधिकतम विस्थापन

Solution : (b, d) कला $\pi/2$ का अर्थ है आयाम की स्थिति और इस पर त्वरण तथा विस्थापन सर्वाधिक होते हैं।

Problem 27. सरल आवर्त गति के विस्थापन का समीकरण $y = a\sin\omega t$ द्वारा दिया जाता है। $t = T/4$ समय पर कण का त्वरण होगा

[MP PET 1984]

(a) $a\omega$ (b) $-a\omega$ (c) $a\omega$ (d) $-a\omega^2$

Solution : (d)

Problem 28. m द्रव्यमान का कण k बल नियतांक वाली स्प्रिंग के निचले सिरे पर बंधा हुआ है तथा ऊर्ध्वाधर सरल आवर्त गति कर रहा है। इसकी कुल ऊर्जा [CPMT 1978]

(a) आयाम पर अधिकतम होगी (b) साम्यावस्था पर अधिकतम होगी

(c) साम्यावस्था पर न्यूनतम होगी (d) सभी स्थितियों पर समान होगी

Solution : (d)

सरल आवर्त गति का आवर्तकाल एवं आवृत्ति

सरल आवर्त गति के लिए प्रत्यानयन बल, विस्थापन के समानुपाती होता है।

$F \propto -y$ अथवा $F = -ky$ ..... (i) [यहाँ k बल नियतांक है]

सरल आवर्त गति करती वस्तु का त्वरण $A = -\omega^2 y$ ..... (ii)

वस्तु पर प्रत्यानयन $F = mA = -m\omega^2 y$ ..... (iii)

समी. (i) व (iii) से, $ky = m\omega^2 y \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m}$

$\therefore \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

अथवा आवृत्ति $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

भिन्न-भिन्न प्रकार की सरल आवर्त गतियों में k तथा m के मान भिन्न-भिन्न होते हैं। सामान्यतः m को जड़त्वीय नियतांक तथा k को स्प्रिंग नियतांक कहा जाता है।

अतः सामान्य सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{जडत्वीय नियतांक}}{\text{स्प्रिंग नियतांक}}}$ या $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{स्प्रिंग नियतांक}}{\text{जडत्वीय नियतांक}}}$

सरल आवर्त गति हेतु आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\text{बल}/\text{विस्थापन}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\times\text{विस्थापन}}{m\times\text{त्वरण}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{विस्थापन}}{\text{त्वरण}}} = 2\pi\sqrt{\frac{y}{A}}$

अथवा आवृत्ति $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{त्वरण}}{\text{विस्थापन}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{y}}$

सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण

सरल आवर्त गति हेतु $A \propto -y$

$A = -\omega^2 y$

$mA = -m\omega^2 y$

$\Rightarrow \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + m\omega^2 y = 0$

$\Rightarrow \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \qquad$ [चूँकि $\omega = \frac{k}{m}$]

Problem 29. कोई कण इस प्रकार गति करता है कि उसका त्वरण समीकरण $a = -bx$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। जिसमें x संतुलन स्थिति से विस्थापन तथा b कोई नियतांक है। दोलनकाल होगा

(a) $2\pi\sqrt{b}$ (b) $2\pi/\sqrt{b}$ (c) $2\pi/b$ (d) $2\sqrt{\pi/b}$

Solution : (b) त्वरण $= -\omega^2$ विस्थापन

दिया है $a = -bx$

अतः $\omega^2 = b \Rightarrow \omega = \sqrt{b}$

आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{b}}$

Problem 30. किसी कण की गति का समीकरण $\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$ है जहाँ k बल नियतांक है तो गति का आवर्तकाल होगा

(a) $\frac{2\pi}{k}$ (b) $2\pi k$ (c) $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ (d) $2\pi\sqrt{k}$

Solution : (c) मानक समीकरण $\frac{dy^2}{dt^2} + ky = 0$ से तुलना करने पर, $m = 1$ तथा $k = k$

अतः $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$

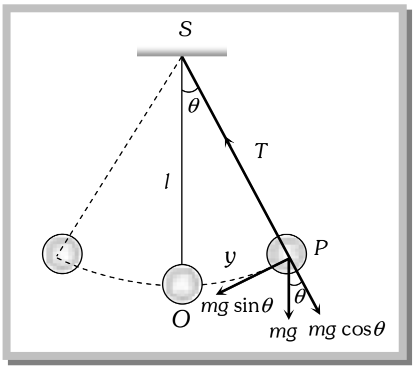
सरल लोलक

यदि किसी पदार्थ के भारी लेकिन बिन्दु सदृश कण को एक भारहीन, लंबाई में न बढ़ने वाली पूर्ण लचीली डोरी के एक सिरे से बांधकर किसी दृढ़ आधार से लटका दें तो इसे सरल लोलक कहते हैं।

लोलक के गोलक के केन्द्र से निलम्बन बिन्दु तक की दूरी को लोलक की प्रभावकारी लंबाई (Effective length) कहते हैं।

यदि m = गोलक का द्रव्यमान, l = प्रभावकारी लंबाई, x = गोलक का साम्यावस्था से विस्थापन

यदि गोलक को साम्यावस्था से θ कोण पर विस्थापित करते हैं तो इस पर प्रत्यानयन बल $mg\sin\theta$ कार्य करता है जो इसे वापस साम्यावस्था पर लाने की कोशिश करता है।



प्रत्यानयन बल $F = -mg\sin\theta$ (sin $\theta = \theta$ जबकि θ अत्यल्प है)

$$F = -mg\,\theta$$

$$F = -mg\frac{x}{l}$$

$$\frac{F}{x} = -\frac{mg}{l} = k \text{ (स्प्रिंग नियतांक)}$$

आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{जडत्वीय नियतांक}}{\text{स्प्रिंग नियतांक}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Important points

(i) जब कोणीय विस्थापन का मान बहुत कम (लगभग 4° या 5°) हो तब सरल लोलक का आवर्तकाल आयाम पर निर्भर नहीं करता परंतु θ का मान अधिक होने पर $\sin\theta = \theta$ नहीं कहा जा सकता अतः कोणीय विस्थापन θ_0 पर आवर्तकाल निर्भर करता है और गति केवल आवर्ती होती है सरल आवर्त गति नहीं।

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2(\theta_0) + \text{..........}\right] \approx T_0\left[1 + \frac{\theta_0^{\,2}}{16}\right]$$

(ii) सरल लोलक का आवर्तकाल, गोलक के द्रव्यमान से मुक्त होता है।

(a)यदि ठोस गोलक को समान त्रिज्या वाले अन्य खोखले गोलक से बदल दिया जाए परंतु द्रव्यमान अपरिवर्तित रहे तब आवर्तकाल पर कोई प्रभाव नहीं होता।

(b) यदि कोई लड़की झूला झूल रही है और अचानक समान द्रव्यमान की अन्य लड़की आकर इसके बगल में बैठ जाती है तो झूले का आवर्तकाल वही रहता है।

(iii) $T \propto \sqrt{l}$ अर्थात् सरल लोलक का आवर्तकाल प्रभावकारी लंबाई के वर्गमूल के समानुपाती होता है।

(a) यदि झूला झूलती लड़की अचानक खड़ी हो जाए तो इसका आवर्तकाल घट जाता है क्योंकि इसके खड़े होने से गुरुत्व केन्द्र कुछ ऊपर उठ जाता है जिससे प्रभावकारी लंबाई घट जाती है।

(b) यदि खोखली गेंद (जिसमें पानी भरा हुआ है) में एक छोटा सा छेद कर दिया जाए जिससे पानी बूंद–बूंद करके रिसने लगता है। तो इसका आवर्तकाल पहले बढ़ता है क्योंकि गुरुत्व केन्द्र नीचे खिसकता है अर्थात् प्रभावकारी लंबाई बढ़ती है।

परंतु पूरा पानी निकल जाने पर खोखली गेंद का द्रव्यमान केन्द्र पुनः केन्द्र में आ जाने से इसका आवर्तकाल पहले के ही समान हो जाता है।

(iv) यदि सरल लोलक की लंबाई पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में नगण्य नहीं है तब आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{g\left(\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{R}\right)}}$

(a) यदि $l << R$ तब $\dfrac{1}{l} >> \dfrac{1}{R}$ अतः $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ (सामान्य सूत्र)

(b) यदि $l >> R\ (\to \infty)$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{6.4\times10^6}{10}} = 84.6\ \text{min}$

यह किसी भी सरल लोलक का अधिकतम आवर्तकाल है।

(c) यदि $l = R$ तब $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{2g}} \cong 1$ घंटा

(v) यदि सरल लोलक को धात्विक तार से बांधकर लटकाया जाए तो तापक्रम में वृद्धि होने से इसका आवर्तकाल बढ़ जाता है।

यदि l_0 = प्रारंभिक लंबाई, l = अंतिम लंबाई, $\Delta\theta$ = ताप से वृद्धि , α = रेखीय ताप प्रसार गुणांक

तब $\quad l = l_0(1+\alpha\Delta\theta)$

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{l}{l_0}} = (1+\alpha\Delta\theta)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}\alpha\Delta\theta$$

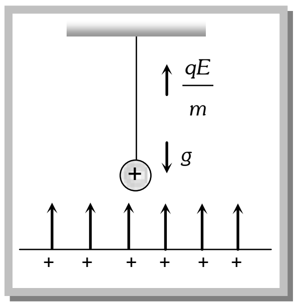
अतः $\quad \dfrac{T}{T_0} - 1 = \dfrac{1}{2}\alpha\Delta\theta \qquad$ अर्थात् $\quad \dfrac{\Delta T}{T} \approx \dfrac{1}{2}\alpha\Delta\theta$

(vi) यदि सरल लोलक के गोलक (घनत्व ρ) को ऐसे द्रव में डुबो दिया जाए जिसका घनत्व σ $(\sigma < \rho)$ है तो इसका आवर्तकाल बढ़ जाता है। चूंकि उत्प्लावन बल गोलक पर ऊपर की ओर कार्य करता है जिससे इसके भार मे कमी आ जाती है।

$mg' = mg -$ उत्पलावन बल

$$g' = g - \frac{\sigma g}{\rho} \Rightarrow g' = g\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho-\sigma}} > 1 \quad \text{अतः } T' > T$$

(vii) यदि सरल लोलक के गोलक का द्रव्यमान m प्रभावकारी लंबाई l तथा गोलक पर धनावेश q है। इस सरल लोलक के नीचे ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर विद्युत क्षेत्र कार्य करता है तो गोलक पर कार्य करने वाला नेट त्वरण $g' = g - \dfrac{qE}{m}$



अतः आवर्तकाल $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-\dfrac{qE}{m}}}$

यदि विद्युत क्षेत्र की दिशा ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर होती है तब $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+\dfrac{qE}{m}}}$

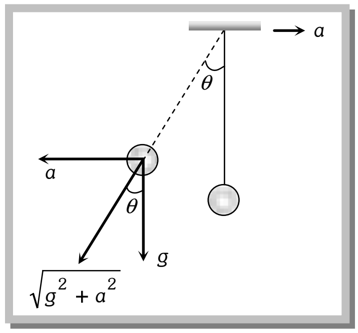
यदि विद्युत क्षेत्र क्षैतिज दिशा में कार्य करता है तब $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+\left(\dfrac{qE}{m}\right)^2}}}$

(viii) लिफ्ट की छत से लटक रहे सरल लोलक का आवर्तकाल

लिफ्ट विराम में है अथवा नियत वेग से ऊपर या नीचे की ओर गतिमान है	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$
यदि लिफ्ट नियत त्वरण a से ऊपर की ओर गतिमान है	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$	$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g+a}{l}}$
लिफ्ट नियत त्वरण a से नीचे की ओर गतिमान है	$T = 2\pi\frac{l}{g-a}$	$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g-a}{l}}$
लिफ्ट गुरुत्वीय त्वरण से नीचे की ओर आ रही है ($a = g$)	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-g}} = \infty$	$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g-g}{l}} = 0$

(ix) यदि कोई पेण्डुलम, ट्राली की छत से लटक रहा है और ट्राली नियत त्वरण a से क्षैतिज दिशा में गतिमान है तब

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{(g^2+a^2)^{1/2}}} \qquad \text{तथा} \quad \theta = \tan^{-1}(a/g)$$



(x) यदि ट्राली क्षैतिज वृत्तीय मार्ग पर v वेग से मुड़ रही है तब

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+\frac{v^2}{r}}}}$$ यहाँ r = वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या; $\frac{v^2}{r}$ = अपकेन्द्रीय त्वरण

(xi) सेकण्ड लोलक : वह लोलक जिसका आवर्तकाल 2 सेकण्ड होता है सेकण्ड लोलक कहलाता है।

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ में $T = 2\,sec$ तथा g = 9.8 मी/से² रखने पर, $l = \frac{4\times 9.8}{4\pi^2}$ = 0.993 मी = 99.3 सेमी ≈ 1 मी (लगभग)

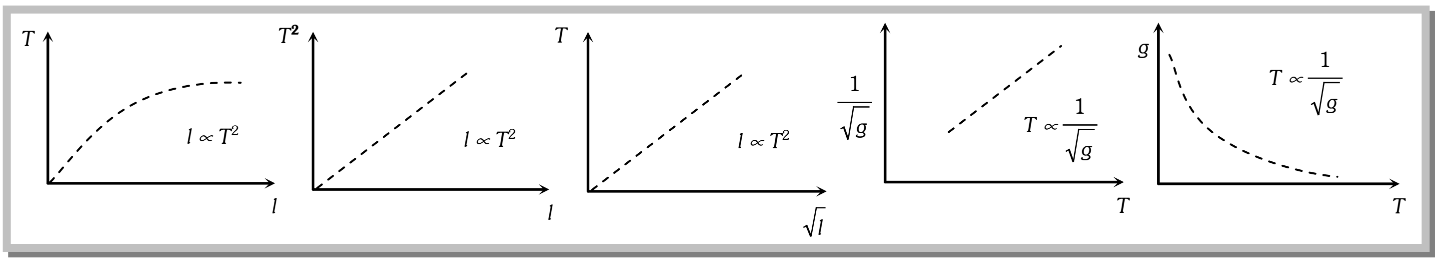
अर्थात् पृथ्वी की सतह पर सेकण्ड लोलक की लंबाई 1 मीटर होती है।

जबकि चंद्रमा की सतह पर सेकण्ड लोलक की लंबाई 1/6 मीटर होती है, क्योंकि ($g_{\text{चन्द्रमा}} = \frac{g_{\text{पृथ्वी}}}{6}$)

(xii) एक सम्पूर्ण दोलन में सरल लोलक के द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

(xiii) किसी पेण्डुलम को ऊर्ध्वाधर से θ कोण तक विस्थापित करने में किया गया कार्य $W = U = mgl(1-\cos\theta)$

(xiii) सरल लोलक सम्बन्धी विभिन्न ग्राफ



Problem 31. एक घड़ी जो 20° C ताप पर सही समय दर्शाती है, इसे 40°C ताप पर रखा जाता है। यदि पेण्डुलम का रेखीय प्रसार गुणांक $12 \times 10^{-6}/^0C$ हो तो यह कितने समय आगे या पीछे होगी [BHU 1998]

(a) 10.3 सेकण्ड/दिन (b) 20.6 सेकण्ड/दिन (c) 5 सेकण्ड/दिन (d) 20 सेकण्ड/दिन

Solution : (a) $\frac{\Delta T}{T}=\frac{1}{2}\alpha\Delta\theta=\frac{1}{2}12\times10^{-6}(40-20)\Rightarrow \Delta T=12\times10^{-5}\times86400$ सेकण्ड / दिन = 10.3 सेकण्ड / दिन

Problem 32. सरल लोलक के धात्विक गोलक का आपेक्षिक घनत्व ρ है। इसका आवर्तकाल T है। यदि गोलक को पानी में डुबो दिया जाए तब सरल लोलक का नया आवर्तकाल होगा [SCRA 1998]

(a) $T\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)$ (b) $T\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)$ (c) $T\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}$ (d) $T\sqrt{\frac{\rho}{\rho-1}}$

Solution : (d) $\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\rho}{\rho-\sigma}}$ यहाँ पानी हेतु $\sigma=1$ अतः $T'=T\sqrt{\frac{\rho}{\rho-1}}$

Problem 33. सरल लोलक का आवर्तकाल दुगना हो जाएगा जबकि [CPMT 1974; MNR 1980; AFMC 1995]

(a) इसकी लंबाई दुगनी कर दी जाए

(b) गोलक का द्रव्यमान चार गुना कर दिया जाए

(c) लंबाई चार गुनी कर दी जाए

(d) लंबाई तथा गोलक का द्रव्यमान दोनों दोगुने कर दिये जाएँ

Solution : (c)

Problem 34. एक सरल लोलक का आवर्तकाल T है यदि लोलक की लंबाई 21% बढ़ा दी जाए तो इसका आवर्तकाल कितने प्रतिशत बढ़ जाएगा [BHU 1994]

(a) 10 % (b) 21 % (c) 30 % (d) 50 %

Solution : (a) $T\propto\sqrt{l}$ अतः $\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{l_2}{l_1}}=\sqrt{1.21}=1.1\Rightarrow T_2=1.1\,T_1=T_1+10\%\,T_1$

Problem 35. सरल लोलक की लंबाई 1 प्रतिशत बढ़ाने पर इसका आवर्तकाल [MP PET 1994]

(a) 1 % बढ़ेगा (b) 0.5 % बढ़ेगा (c) 0.5 % घटेगा (d) 2 % बढ़ेगा

Solution : (b) $T\propto\sqrt{l}$ $\therefore$ T के मान में प्रतिशत वृद्धि $=\frac{1}{2}$(l के मान में प्रतिशत वृद्धि) $=\frac{1}{2}\times1\%=0.5\%$

Problem 36. m द्रव्यमान तथा गतिज ऊर्जा E वाले एक सरल लोलक का अधिकतम रेखीय संवेग होगा [MP PMT 1986]

(a) $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ (b) $\sqrt{2mE}$ (c) $2mE$ (d) mE^2

Solution : (b) $E=\frac{P^2}{2m}$ अतः $P=\sqrt{2mE}$; जहाँ E = गतिज ऊर्जा अधिकतम, P = संवेग, m = द्रव्यमान

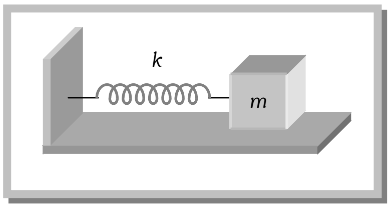
Problem 37. किसी ग्रह का द्रव्यमान एवं व्यास पृथ्वी का दो गुना है, तब इस ग्रह पर सेकेण्डी लोलक का दोलनकाल होगा (यदि लोलक पृथ्वी पर सेकेण्डी लोलक है)

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,sec$ (b) $2\sqrt{2}\,sec$ (c) $2\,sec$ (d) $\frac{1}{2}\,sec$

Solution : (b) $g\propto\frac{M}{R^2}$ अतः $g'=\frac{g}{2}$ $\therefore$ $\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{g}{g'}}=\sqrt{2}\Rightarrow T'=2\sqrt{2}\,sec$

स्प्रिंग लोलक

यदि m द्रव्यमान का पिण्ड k बल नियतांक वाली स्प्रिंग के मुक्त सिरे पर बांधने पर सरल आवर्त गति करे तो इसे स्प्रिंग पेण्डुलम कहते हैं।



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{जड़त्वीय नियतांक}}{\text{स्प्रिंग नियतांक}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{तथा } n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Important points

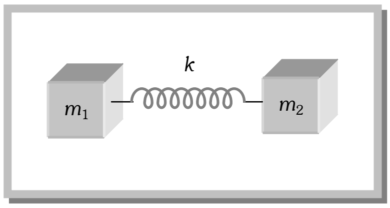
(i) स्प्रिंग पेण्डुलम का आवर्तकाल द्रव्यमान पर निर्भर करता है। द्रव्यमान अधिक होने पर आवर्तकाल अधिक जबकि आवृत्ति कम होगी। इसका विलोम भी सही है।

(ii) आवर्तकाल बल नियतांक के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होता है। $T \propto \frac{1}{\sqrt{k}}$ या $n \propto \sqrt{k}$

(iii) स्प्रिंग पेण्डुलम का आवर्तकाल गुरुत्वीय त्वरण 'g' से मुक्त होता है। इसी कारण स्प्रिंग पर आधारित घड़ियाँ पहाड़ी पर, चंद्रमा पर, खदानों के अन्दर, पृथ्वी के केन्द्र पर अथवा उपग्रह पर अर्थात् सभी स्थानों पर सही समय दर्शाती है। जबकि सरल लोलक वाली घड़ी द्वारा दिखाया गया समय g के बदलने से प्रत्येक स्थान पर बदलता है।

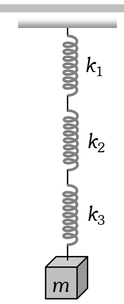
(iv) यदि स्प्रिंग का द्रव्यमान नगण्य न होकर M माना जाए तो इस पर लटके m द्रव्यमान का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{eff}}{k}} \qquad \text{जहाँ } m_{eff} = m + \frac{M}{3}$$



(v) यदि दो द्रव्यमान m_1 व m_2 चित्रानुसार स्प्रिंग से जुड़े हुए हैं तथा क्षैतिज तल पर सरल आवर्त गति करते हैं

$$\text{तब} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m_r}{k}} \quad \text{जहाँ } \frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$



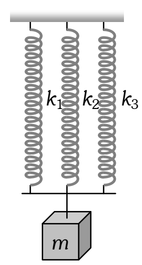
श्रेणी संयोजन

(viii) श्रेणी संयोजन : यदि n स्प्रिंगों को श्रेणी क्रम में चित्रानुसार जोड़ा जाए और स्प्रिंगों के बल नियतांक क्रमशः $k_1, k_2, k_3 ....$ हों तो

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + ...$$

यदि प्रत्येक स्प्रिंग का बल नियतांक समान तथा k के बराबर हो तो

$$k_{eff} = \frac{k}{n}$$



समान्तर संयोजन

(ix) समान्तर संयोजन : यदि n स्प्रिंगों को समान्तर क्रम में जोड़ा जाए और स्प्रिंगों के बल नियतांक क्रमशः $k_1, k_2, k_3 ....$ हों तो

$$k_{eff} = k_1 + k_2 + k_3 + ...$$

यदि प्रत्येक स्प्रिंग का बल नियतांक समान तथा k के बराबर हो तो

$$k_{eff} = nk$$

(x) यदि k बल नियतांक वाली स्प्रिंग को n बराबर भागों में तोड़ दिया जाए तो प्रत्येक भाग का बल नियतांक nk हो जाता है। यदि इन भागों को समान्तर क्रम में जोड़ दिया जाए तब संयोजन का प्रभावी बल नियतांक

$$k_{eff} = n^2 k$$

(xi) स्प्रिंग का बल नियतांक, स्प्रिंग की लंबाई के व्युत्क्रमानुपाती होता है। अतः इसको दो भागों में तोड़ने पर प्रत्येक भाग का बल नियतांक पहले का दुगना हो जाता है।

चूंकि $k \propto \frac{1}{\text{लम्बाई में परिवर्तन}} \propto \frac{1}{\text{मूल लम्बाई}}$ (क्योंकि लम्बाई में परिवर्तन, मूल लम्बाई के समानुपाती होता है।)

(xii) l लंबाई की स्प्रिंग को दो भागों में इस प्रकार तोड़ा जाए कि $l_1 = nl_2$ तो स्प्रिंग के प्रत्येक भाग का बल नियतांक निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं। $k_1 = \frac{k(n+1)}{n}$ तथा $k_2 = (n+1)k$ यहाँ k मूल लंबाई का बल नियतांक है।

Problem 38. स्प्रिंग नियतांक k वाली एक स्प्रिंग को काटकर दो हिस्से इस प्रकार किए जाते हैं कि एक हिस्सा दूसरे से लंबाई में दुगना है। तब लम्बे हिस्से का स्प्रिंग स्थिरांक होगा [IIT-JEE 1999]

(a) $\frac{2}{3}k$ (b) $\frac{3}{2}k$ (c) $3k$ (d) $6k$

Solution : (b) यदि $l_1 = nl_2$ यहां $l_1 = 2l_2$ अर्थात् $n = 2$ दिया है

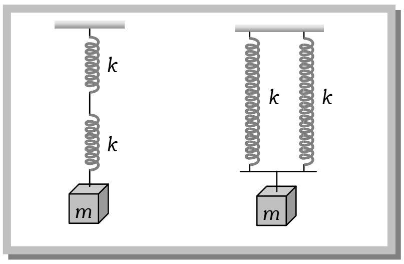
तब $k_1 = \frac{(n+1)}{n}k = \frac{3}{2}k$

Problem 39. बराबर द्रव्यमान के दो पिण्ड M तथा N दो द्रव्यमानहीन स्प्रिंगों से अलग-अलग लटके हैं। स्प्रिंगों के बल नियतांक क्रमशः k_1 तथा k_2 हैं। यदि दोनों पिण्ड ऊर्ध्वाधर तल में इस प्रकार कंपन करते हैं कि उनके अधिकतम वेग बराबर हैं, तब M के कंपन के आयाम का N के साथ अनुपात होगा [MP PET 1997; MP PMT 1997; IIT-JEE 1988; BHU 1998]

(a) k_1/k_2 (b) $\sqrt{k_1/k_2}$ (c) $\frac{k_2}{k_1}$ (d) $\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$

Solution : (d) दोनों पिण्डों के अधिकतम वेग समान हैं। अतः $a_1\omega_1 = a_2\omega_2 \Rightarrow a_1\sqrt{\frac{k_1}{m}} = a_2\sqrt{\frac{k_2}{m}} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$

Problem 40. समान स्प्रिंग नियतांक k वाली दो स्प्रिंगों को श्रेणीक्रम में जोड़ा जाता है तथा बाद में समांतर क्रम में जोड़ते हैं यदि इनसे m द्रव्यमान का पिण्ड लटका है तो उनकी ऊर्ध्वाधर दोलनों की आवृत्तियों का अनुपात होगा



(a) 2 : 1
(b) 1 : 1
(c) 1 : 2
(d) 4 : 1

Solution : (c) $n \propto \sqrt{k}$ $\therefore$ श्रेणी संयोजन के लिए $n_1 \propto \sqrt{k/2}$

तथा समान्तर संयोजन के लिए $n_2 \propto \sqrt{2k}$ अतः $\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$

Problem 41. स्प्रिंग नियतांक k की स्प्रिंग से जुड़ा m द्रव्यमान का एक गुटका चिकनी क्षैतिज मेज पर दोलन कर रहा है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा दीवार से जुड़ा है। स्प्रिंग की प्राकृतिक लंबाई पर गुटके की चाल υ है। क्षणिक विराम मे आने से पूर्व यदि गुटका साम्य स्थिति से x दूरी चलता है तो

(a) $x = \sqrt{m/k}$ (b) $x = \frac{1}{\upsilon}\sqrt{\frac{m}{k}}$ (c) $x = \upsilon\sqrt{\frac{m}{k}}$ (d) $x = \sqrt{\frac{m\upsilon}{k}}$

Solution : (c) m द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा = स्प्रिंग की प्रत्यास्थ ऊर्जा

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \upsilon\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Problem 42. एक क्षैतिज घर्षण रहित मेज पर एक ब्लॉक रखा है। इस ब्लॉक का द्रव्यमान m है और दोनों ओर स्प्रिंग लगी है जिनके बल स्थिरांक k_1 और k_2 हैं। यदि इस ब्लॉक को थोड़ा विस्थापित करके छोड़ दिया जाए तो दोलन की कोणीय आवृत्ति होगी [MP PET 1994]

(a) $\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)^{1/2}$ (b) $\left(\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}\right)^{1/2}$ (c) $\left(\frac{k_1k_2}{(k_1-k_2)m}\right)^{1/2}$ (d) $\left(\frac{k_1{}^2+k_2{}^2}{(k_1+k_2)_m}\right)^{1/2}$

Solution : (a) प्रश्न में वर्णित स्थिति के अनुसार $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$ $k_{eff} = k_1 + k_2$

अतः कोणीय आवृत्ति $\omega = \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)^{1/2}$

Problem 43. 200 ग्राम द्रव्यमान का एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है। 80 न्यूटन/मीटर बल नियतांक की स्प्रिंग द्वारा प्रत्यानयन बल दिया जाता है। दोलनों का आवर्तकाल है [MP PET 1994]

(a) 0.31 *sec* (b) 0.15 *sec* (c) 0.05 *sec* (d) 0.02 *sec*

Solution : (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{80}} = 0.31\ sec$

Problem 44. l लंबाई की एक स्प्रिंग का बल नियतांक k है, जब इस पर भार W लटकाया जाता है तो इसकी लंबाई में वृद्धि x होती है। यदि स्प्रिंग को दो बराबर टुकड़ों में काटकर तथा उन्हें समांतर क्रम मे रखकर उन पर वही भार W लटकाया जाये तो अब वृद्धि होगी [MP PMT 1994]

(a) $2x$ (b) x (c) $x/2$ (d) $x/4$

Solution : (d) स्प्रिंग को दो बराबर भागों मे करने पर प्रत्येक का बल नियतांक दो गुना हो जाएगा। अर्थात् यदि पहले स्प्रिंग का बल नियतांक k था तो अब प्रत्येक भाग का बल नियतांक $2k$ होगा।

अब यदि इन टुकड़ों को समान्तर क्रम में जोड़ा जाए तो संयोजन का बल नियतांक $4k$ होगा।

चूंकि $x \propto \frac{1}{k}$ अतः $\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{k}{4k} \Rightarrow x_2 = \frac{x}{4}$

Problem 45. एक द्रव्यमान m एवं k बल नियतांक तथा l लम्बाई वाली स्प्रिंग से लटकाया गया है। इस द्रव्यमान की दोलन आवृत्ति f_1 है। यदि स्प्रिंग को दो बराबर भागों में काटकर उसी द्रव्यमान को एक भाग से लटका दिया जाए तो अब नयी आवृत्ति f_2 है। सही संबंध होगा

(a) $f_1 = \sqrt{2}f_2$ (b) $f_1 = f_2$ (c) $f_1 = 2f_2$ (d) $f_2 = \sqrt{2}f_1$

Solution : (d) $f \propto \sqrt{k}$ स्प्रिंग को दो बराबर भागों में तोड़ने पर प्रत्येक भाग का बल नियतांक दो गुना हो जाता है।

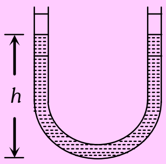
$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{2} \Rightarrow f_2 = \sqrt{2}\, f_1$$

विभिन्न सरल आवर्त गतियाँ

<table>
<tr>
<td>

U नलिका में द्रव की सरल आवर्त गति

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$

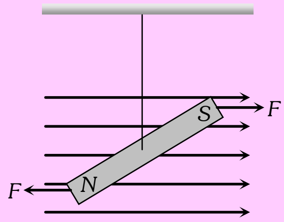


जहाँ $L = U$ नलिका की कुल लंबाई,
h = प्रत्येक भुजा में साम्यावस्था में द्रव की ऊँचाई ($L = 2h$)

</td>
<td>

छड़ चुंबक की चुंबकीय क्षेत्र में सरल आवर्त गति

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MB}}$

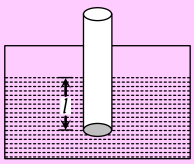


जहाँ B = चुम्बकीय क्षेत्र
I = छड़ चुम्बक का जड़त्व आघूर्ण,
M = छड़ चुम्बक का चुबकीय आघूर्ण

</td>
</tr>
<tr>
<td>

द्रव तल पर तैरते हुए बेलन की सरल आवर्त गति

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

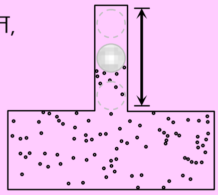


जहाँ
l = बेलन की द्रव के भीतर डूबी लंबाई

</td>
<td>

वायु प्रकोष्ठ में गेंद की सरल आवर्त गति

$T = \frac{2\pi}{A}\sqrt{\frac{mV}{E}}$ जहाँ m = गेंद का द्रव्यमान,

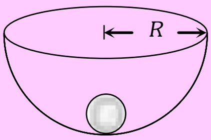


V = वायु प्रकोष्ठ का आयतन,
A = स्तम्भ के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल,
E = वायु का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

</td>
</tr>
<tr>
<td>

अर्द्ध गोलीय प्याले में गेंद की सरल आवर्त गति

$T = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}$

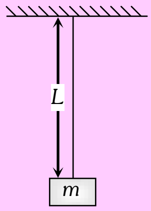


जहाँ R = प्याले की त्रिज्या,
r = गेंद की त्रिज्या

</td>
<td>

किसी तार से लटकाकर बांधे गए द्रव्यमान की प्रत्यास्थता के कारण सरल आवर्त गति

$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{YA}}$ जहाँ m = पिण्ड का द्रव्यमान,

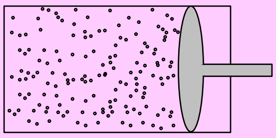


A = तार का अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल
L = तार की लंबाई, Y = यंग प्रत्यास्थता गुणांक

</td>
</tr>
<tr>
<td>

सिलिण्डर में पिस्टन की सरल आवर्त गति

$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mh}{PA}}$

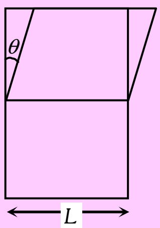


जहाँ M = पिस्टन का द्रव्यमान,
h = सिलिण्डर की ऊँचाई, P = सिलिण्डर में दाब
A = सिलिण्डर के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

</td>
<td>

घन की सरल आवर्त गति

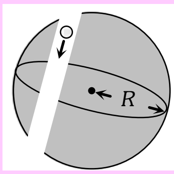
यदि समान भुजाओं के दो घन चित्रानुसार एक दूसरे के ऊपर रखे गए हैं। ऊपर वाला घन पूर्णतः दृढ़ है जबकि निचले घन का दृढ़ता गुणांक η है। यदि घन की भुजा की लंबाई L और इसका द्रव्यमान M हो तब $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\eta L}}$



</td>
</tr>
<tr>
<td>

किसी भी जीवा के परितः पृथ्वी में खोदी गई सुरंग में पिण्ड की सरल आवर्त गति

$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ = 84.6 मिनट

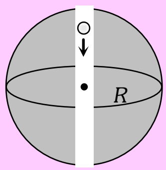


जहाँ R = पृथ्वी की त्रिज्या, g = गुरुत्वीय त्वरण

</td>
<td>

व्यास के परितः पृथ्वी में खोदी गई सुरंग में पिण्ड की सरल आवर्त गति

$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ = 84.6 मिनिट



जहाँ R = पृथ्वी की त्रिज्या, g = गुरुत्वीय त्वरण

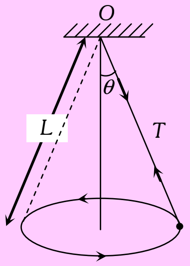
</td>
</tr>
</table>

शंक्वाकार पेण्डुलम का आवर्तकाल

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$ जहाँ L = डोरी की लंबाई,

θ = डोरी का ऊर्ध्व से कोण,

g = गुरुत्वीय त्वरण



L-C परिपथ का आवर्तकाल : $T = 2\pi\sqrt{LC}$

जहाँ L = स्वप्रेरण गुणांक, C = संधारित्र की धारिता

महत्वपूर्ण तथ्य तथा सूत्र

(1) यदि k_1 बल नियतांक वाली स्प्रिंग पर m द्रव्यमान लटकाया जाए तो उसके ऊर्ध्व दोलन का आवर्तकाल T_1 है। यदि यही द्रव्यमान k_2 बल नियतांक वाली स्प्रिंग पर लटकाया जाए तो उसके ऊर्ध्व दोलन का आवर्तकाल T_2 है। अब यदि दोनों स्प्रिंगें श्रेणी क्रम में जोड़कर निचले सिरे पर वही द्रव्यमान लटकायें तो अब ऊर्ध्व दोलन का आवर्तकाल मान T है।

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ अतः $k_1 = \frac{4\pi^2 m}{T_1^2}$ तथा $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$ अतः $k_2 = \frac{4\pi^2 m}{T_2^2}$

स्प्रिंगों के श्रेणी संयोजन हेतु $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ [यहाँ $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$]

k, k_1 तथा k_2 का मान रखने पर $\frac{T^2}{4\pi^2 m} = \frac{T_1^2}{4\pi^2 m} + \frac{T_2^2}{4\pi^2 m}$

निकाय का आवर्तकाल $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$

यदि स्प्रिगों को अब समांतर क्रम में जोड़ा जाए तब $k = k_1 + k_2$

k, k_1 तथा k_2 का मान रखने पर $\frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 m}{T_1^2} + \frac{4\pi^2 m}{T_2^2}$

निकाय का आवर्तकाल $T = \frac{T_1 T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}$

(2) आवर्तकाल कम होने से पेण्डुलम वाली घड़ी तेजी से चलने लगती है जबकि आवर्तकाल बढ़ने से यह सुस्त हो जाती है।

(3) k, $2k$, $4k$, $8k$, ………………… अनन्त स्प्रिंग श्रेणी क्रम में जोड़ने पर प्रभावी बल नियतांक $k/2$ होगा।

(4) यदि कोई सरल आवर्त गति किन्हीं दो अन्य सरल आवर्त गतियों $y_1 = a\sin\omega t$, तथा $y_2 = b\cos\omega t$ के अध्यारोपण से प्राप्त होती है तब

$$y = y_1 + y_2$$
$$y = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$
$$y = A\sin(\omega t + \phi)$$

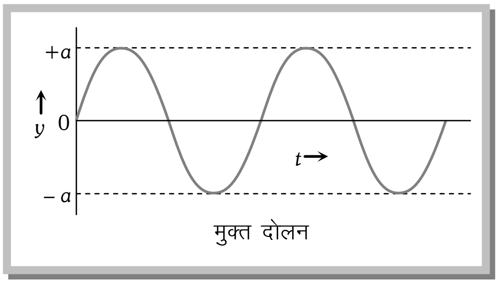
जहाँ $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ तथा $\phi = \tan^{-1}(b/a)$

(5) कोई कण सरल आवर्त गति कर रहा है। माध्य स्थिति से x_1 दूरी पर विस्थापन v_1 तथा x_2 दूरी पर विस्थापन v_2 है। तब

$$\omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}},\ a = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} \text{ तथा } v_{max} = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{x_2^2 - x_1^2}}$$

मुक्त, अवमंदित तथा प्रणोदित दोलन

(1) **मुक्त दोलन :** बाह्य बल की अनुपस्थिति में किसी पिण्ड को उसकी साम्य स्थिति से एक ओर थोड़ा सा विस्थापित करके छोड़ने पर पिण्ड के एक नियत आयाम तथा निश्चित आवृति के दोलन मुक्त दोलन कहलाते हैं।



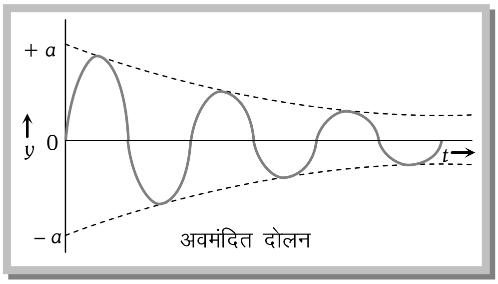
मुक्त दोलन

(2) **अवमंदित दोलन :** अवमंदन बलों की अनुपस्थिति में किसी पिण्ड के लगातार घटते हुए आयाम के दोलन अवमंदित दोलन कहलाते हैं।

अवमंदित दोलनों का आयाम $A = A_0 e^{-\gamma t}$

अवमंदित दोलनों की ऊर्जा $E = E_0 e^{-2\gamma t}$

(3) **प्रणोदित दोलन :** जब कोई पिण्ड बाह्य आवर्ती बल के प्रभाव में बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति के बराबर आवृत्ति से दोलन करता है तो पिण्ड के इन दोलनों को प्रणोदित दोलन कहते हैं।



अवमंदित दोलन

(4) **अनुनादी दोलन :** जब दोलन करने वाले पिण्ड पर लगाये गए बाह्य आवर्त बल (प्रेरक) की आवृति, उस पिण्ड (प्रेरित) की स्वभाविक आवृत्ति के ठीक बराबर (या पूर्ण गुणज) होती है, तो प्रणोदित दोलनों का आयाम बहुत अधिक हो जाता है। इन दोलनों को अनुनादी दोलन कहते हैं तथा इस घटना को अनुनाद कहते हैं।

अनुनाद के उदाहरण

(i) कभी-कभी कमरे में विशेष आवृत्ति की संगीत ध्वनि उत्पन्न करने पर वहाँ रखे बर्तन झनझनाने लगते हैं, क्योंकि बर्तनों की स्वभाविक आवृत्ति, संगीत ध्वनि की आवृत्ति के बराबर हो जाती है।

(ii) यदि किसी सेना को पुल के पार उतरना होता है तो सैनिकों को कदम तोड़कर चलने का आदेश होता है वरना अनुनाद के कारण पुल टूट सकता है।