Topperseducations.co.in

वह पदार्थ जो बाह्य बल लगाने पर बहते हैं तरल कहलाते हैं। द्रव व गैसें तरल हैं। तरल स्वयं किसी आकार के नहीं होते परन्तु यह जिस पात्र में रखे जाते हैं उसका आकार ग्रहण कर लेते हैं। भौतिकी की वह शाखा जिसमें विराम तरलों का अध्ययन किया जाता है द्रव स्थैतिकी कहलाती है जबकि वह शाखा जिसमें गतिशील तरलों का अध्ययन किया जाता है द्रवगतिकी कहलाती है।

दाब

विराम द्रव द्वारा सम्पर्क में रखी सतह पर अभिलम्बवत् आरोपित बल, उस सतह पर द्रव का प्रणोद कहलाता है।

द्रव द्वारा सम्पर्क सतह के प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित अभिलम्बवत् बल (या प्रणोद) द्रव का दाब या द्रव स्थैतिक दाब कहलाता है।

यदि द्रव के सम्पर्क में क्षेत्रफल A पर अभिलम्बवत् बल F हो तो द्रव द्वारा सतह पर आरोपित दाब $P = F/A$

(1) **इकाई :** N/m^2 या पास्कल (S.I.) या डाइन/cm^2 (C.G.S.)

(2) **विमा :** $[P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$

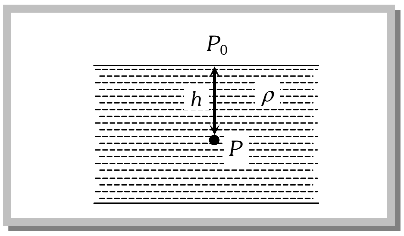
(3) किसी बिन्दु पर दाब सभी दिशाओं में क्रियाशील होता है दाब से कोई निश्चित दिशा सम्बद्ध नहीं होती अतः यह एक प्रदिश (Tensor) राशि है।

(4) **वायुमण्डलीय दाब :** पृथ्वी के चारों ओर गैसों का आवरण पृथ्वी का वायुमण्डल कहलाता है। वायुमण्डल द्वारा आरोपित दाब वायुमण्डलीय दाब कहलाता है। पृथ्वी की सतह पर (समुद्र तल पर) वायुमण्डलीय दाब का मान लगभग $1.013 \times 10^5 N/m^2$ या पास्कल (S.I. मात्रक) होता है। दाब की अन्य प्रायोगिक इकाईयाँ वायुमण्डलीय, बार एवं टॅार (Hg का mm) हैं।

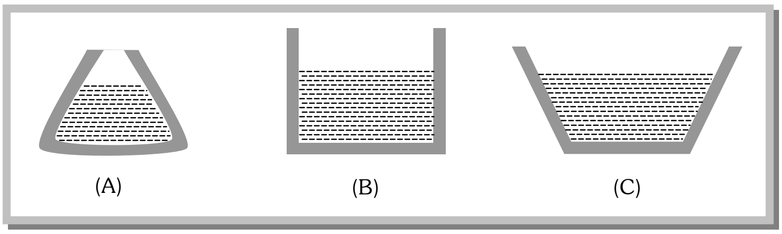
$$1 \text{ वायुमण्डलीय दाब } = 1.01 \times 10^5 \text{ पास्कल} = 1.01 \text{बार} = 760 \text{ टॅार}$$

पृथ्वी की सतह पर वायुमण्डलीय दाब अधिकतम होता है तथा सतह से ऊपर जाने पर वायुमण्डलीय दाब घटता है।

(5) यदि P_0 वायुमण्डलीय दाब हो तो ρ घनत्व वाले द्रव की सतह से h गहराई तक जाने पर द्रव स्थैतिक दाब $P = P_0 + h\rho g$ होगा।

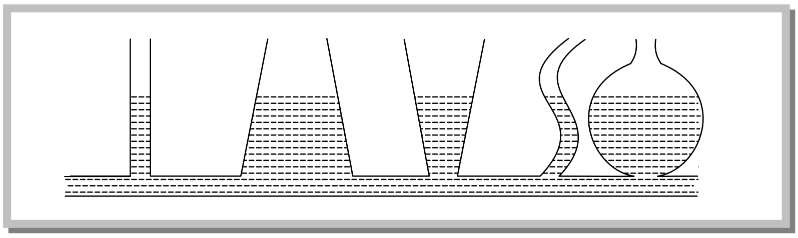


(6) द्रव की अंदर किसी बिन्दु पर द्रव स्थैतिक दाब द्रव की सतह से गहराई (h), द्रव की प्रकृति (ρ) व गुरूत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है। जबकि द्रव की मात्रा, पात्र के आकार या अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता। अतः दिया गया द्रव विभिन्न आकार के पात्रों में समान ऊँचाई में भरा जाए तो पात्रों के तल पर दाब समान होगा जबकि विभिन्न पात्रों में द्रव का आयतन व भार भिन्न–भिन्न होगा।



$P_A = P_B = P_C$ लेकिन $W_A < W_B < W_C$

(7) किसी द्रव में समान तल पर उपस्थित सभी बिन्दुओं पर दाब समान होगा यदि न हो तो दाबान्तर के कारण द्रव बहेगा। इस कारण ही चित्रानुसार सम्पर्कित विभिन्न आकार के पात्रों में द्रव का तल समान होता है जबकि मात्रा भिन्न–भिन्न होती है।



(8) गेज-दाब (Gauge pressure) : द्रव स्थैतिक दाब P व वायुमण्डलीय दाब P_0 का अंतर-प्रमाणिक दाब कहलाता है। $P - P_0 = h\rho g$.

Problem 1. झील के तल की गहराई से आधी गहराई पर स्थित किसी बिन्दु पर दाब झील के तल पर दाब का 2/3 है। झील की गहराई होगी [RPET 2000]

(a) 10 m (b) 20 m (c) 60 m (d) 30 m

Solution : (b) झील की तली पर दाब = $P_0 + h\rho g$ तथा तल की गहराई से आधी गहराई पर दाब $= P_0 + \frac{h}{2}\rho g$

प्रश्नानुसार $P_0 + \frac{1}{2}h\rho g = \frac{2}{3}(P_0 + h\rho g) \Rightarrow \frac{1}{3}P_0 = \frac{1}{6}h\rho g \Rightarrow h = \frac{2P_0}{\rho g} = \frac{2\times10^5}{10^3\times10} = 20m$.

Problem 2. किसी तुला की भुजाओं की सहायता से जल में लटकी दो वस्तुऐं साम्यावस्था में हैं। एक वस्तु का द्रव्यमान 36 g व घनत्व $9\ g/cm^3$ है। यदि दूसरी वस्तु का द्रव्यमान 48 g हो तो घनत्व (g/cm^3) होगा [CBSE 1994]

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 3 (d) 5

Solution : (c) आभासी भार $= V(\rho - \sigma)g = \frac{m}{\rho}(\rho - \sigma)g$

जहाँ $m =$ वस्तु का द्रव्यमान, $\rho =$ वस्तु का घनत्व तथा $\sigma =$ जल का घनत्व

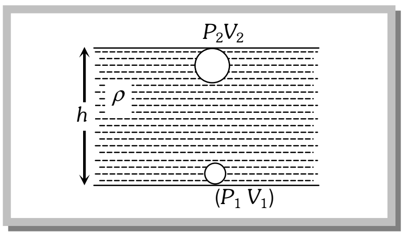
यदि वस्तुऐं साम्यावस्था में हो तो उनके आभासी भार समान होंगे

$\therefore \frac{m_1}{\rho_1}(\rho_1 - \sigma)g = \frac{m_2}{\rho_2}(\rho_2 - \sigma)g \Rightarrow \frac{36}{9}(9-1) = \frac{48}{\rho_2}(\rho_2 - 1)g$. हल करने पर $\rho_2 = 3$

Problem 3. एक उल्टी घण्टी 47.6 m गहरी झील के तली पर रखी है घण्टी में 50 cm^3 वायु निहित है। घण्टी को झील की सतह पर लाने पर इसमें निहित वायु का आयतन होगा [वायुमण्डलीय दाब = पारे का 70 cm दाब, पारे का घनत्व = 13.6 g/cm^3] [CPMT 1989]

(a) 350 cm^3 (b) 300 cm^3 (c) 250 cm^3 (d) 22 cm^3

Solution : (b) बॉयल के नियमानुसार, $P \propto \frac{1}{V}$



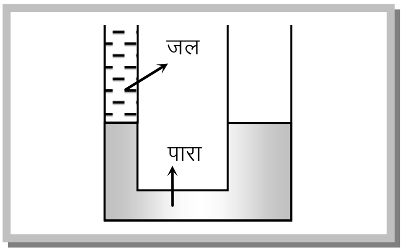
$\Rightarrow P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow (P_0 + h\rho_w g)V_1 = P_0V_2$

$\Rightarrow V_2 = \left(1 + \frac{h\rho_w g}{P_0}\right)V_1$

$\Rightarrow V_2 = \left(1 + \frac{47.6\times10^2\times1\times1000}{70\times13.6\times1000}\right)V_1$ [$P_2 = P_0 = 70\,cm$ पारे का $= 70\times13.6\times1000$ दाब]

$\Rightarrow V_2 = (1+5)50\,cm^3 = 300\,cm^3$

Problem 4. एक U-नली जिसकी बांयी भुजा के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल दांयी भुजा के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल का एक चौथाई है। U-नली में पारा (घनत्व 13.6 g/cm^3)भरा है। पतली नली में पारा नली के ऊपरी सिरे से 36 *cm* नीचे है। दांयी ओर की नली में पारे की ऊँचाई कितनी बढ़ जाएगी यदि बांयी नली में ऊपरी सिरे तक जल भर दिया जाए



(a) 1.2 *cm*

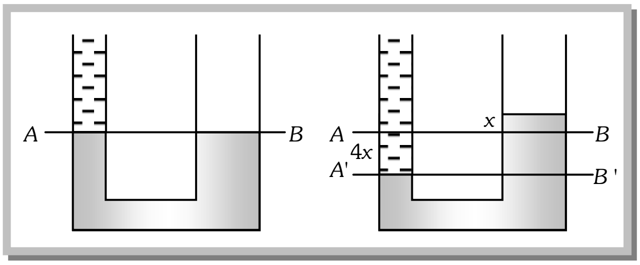
(b) 2.35 *cm*

(c) 0.56 *cm*

(d) 0.8 *cm*

Solution : (c) यदि दांयी भुजा में पारा ऊँचाई *x cm* चढ़े तो बांयी भुजा में 4*x cm* गिर जाएगा क्योंकि दांयीं भुजा का अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल, बांयीं भुजा के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल का 4 गुना है

$\therefore$ बांयी भुजा में जलस्तम्भ की ऊँचाई (36 + 4*x*) *cm* है।

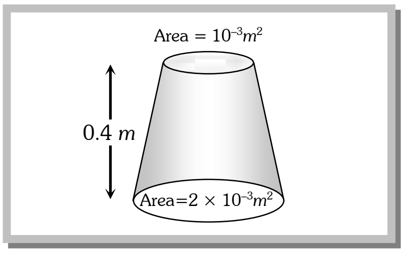


स्तर *A' B'* पर दाब की तुलना करने पर

$(36+4x)\times 1\times g = 5x\times 13.6\times g$

हल करने पर x = 0.56 *cm*

Problem 5. एक समान ढाल का बर्तन चित्रानुसार रखा है। बर्तन में द्रव (900 kg/m^3) भरा है। बर्तन की तली पर लगने वाला बल होगा $(g = 10\,ms^{-2})$



(a) 3.6 *N*

(b) 7.2 *N*

(c) 9.0 *N*

(d) 14.4 *N*

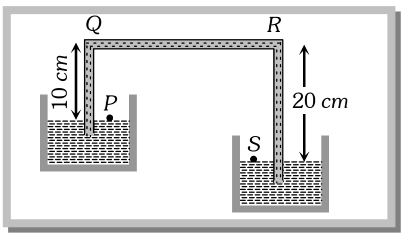
Solution : (b) आधार पर आरोपित बल $F = P\times A = hdgA = 0.4\times 900\times 10\times 2\times 10^{-3} = 7.2N$

Problem 6. 5 मी. ऊँची एक टंकी आधी पानी से भरी है तथा शेष आधी तेल (घनत्व 0.85 g/cm^3) से भरी है। इन द्रवों के कारण टंकी के तली पर दाब होगा

(a) 1.85 g/cm^2 (b) 89.25 g/cm^2 (c) 462.5 g/cm^2 (d) 500 g/cm^2

Solution : (c) तली पर दाब $P = (h_1d_1 + h_2d_2)\frac{g}{cm^2} = [250\times 1 + 250\times 0.85] = 250\,[1.85]\frac{g}{cm^2} = 462.5\frac{g}{cm^2}$

Problem 7. चित्रानुसार, किसी प्रदर्शन में साइफन (Siphon) का प्रयोग होता है। साइफन में प्रवाहित द्रव का घनत्व 1.5 *gm/cc* है। बिन्दु *P* व *S* पर दाबों का अतंर होगा



(a) 10^5 *N/m*

(b) 2 × 10^5 *N/m*

(c) शून्य

(d) अनंत

Solution : (c) चूँकि दोनों बिन्दु द्रव के पृष्ठ पर हैं तथा वायुमण्डल में खुले हैं। अतः दोनों बिन्दुओं पर समान 1 वायुमण्डलीय दाब होगा व दाबांतर शून्य होगा।

Problem 8. समुद्र तल पर वायुदाबमापी में पारे की ऊँचाई 75 *cm* है व किसी पहाड़ी के शिखर पर 50 *cm* है। पारे व वायु के घनत्वों का अनुपात 10^4 है तो पहाड़ी की ऊँचाई होगी

(a) 250 *m* (b) 2.5 *km* (c) 1.25 *km* (d) 750 *m*

Solution : (b) पहाड़ी के शिखर व समुद्रतल पर दाबांतर

$$\Delta P = (h_1 - h_2) \times \rho_{Hg} \times g = (75 - 50) \times 10^{-2} \times \rho_{Hg} \times g \quad ......(i)$$

वायु में h ऊँचाई पर दाबांतर $\Delta P = h \times \rho_{air} \times g$ ......(ii)

समीकरण (i) व (ii) से $h \times \rho_{air} \times g = (75 - 50) \times 10^{-2} \times \rho_{Hg} \times g$

$\therefore h = 25 \times 10^{-2}\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{air}}\right) = 25 \times 10^{-2} \times 10^4 = 2500\, m$ $\therefore$ पहाड़ी की ऊँचाई = 2.5 *km*

घनत्व

किसी तरल में, किसी बिन्दु पर, घनत्व ρ निम्नानुसार परिभाषित किया जाता है: $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$

(1) किसी समांगी व समदैशिक पदार्थ में, इसमें दिशात्मक गुण नहीं होता अतः यह एक अचर राशि है।

(2) इसकी विमाएँ $[ML^{-3}]$ व S.I. मात्रक kg/m^3 जब कि C.G.S. मात्रक g/cc है $[1 g/cc = 10^3 kg/m^3]$

(3) किसी पदार्थ के घनत्व का अर्थ है उसके पदार्थ के द्रव्यमान व पदार्थ द्वारा अधिग्रहित आयतन का अनुपात जबकि किसी वस्तु का घनत्व उसके द्रव्यमान व आयतन का अनुपात होता है। अतः ठोस वस्तुओं के लिए

वस्तु का घनत्व = पदार्थ का घनत्व

जबकि खोखली वस्तुओं में, वस्तु का घनत्व उसके पदार्थ के घनत्व से कम होता है। [$V_{\text{वस्तु}} > V_{\text{पदार्थ}}$]

(4) जब विभिन्न घनत्वों के अमिश्रणीय द्रव किसी पात्र में भरे जाएँ तो उच्चतम घनत्व का द्रव पात्र के तली में जबकि निम्नतम घनत्व का द्रव पात्र में सबसे ऊपर होगा। सम्पर्क सतहें समतल होंगी।

(5) कभी–कभी घनत्व के स्थान पर आपेक्षिक घनत्व या विशिष्ट गुरुत्व का प्रयोग किया जाता है जो निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$\text{आपेक्षिक घनत्व } RD = \frac{\text{वस्तु का घनत्व}}{\text{जल का घनत्व}}$$

(6)यदि m_1 द्रव्यमान व ρ_1 घनत्व का द्रव, m_2 द्रव्यमान व ρ_2 घनत्व के द्रव में मिलाया जाए तो

$$m = m_1 + m_2 \text{ और } V = (m_1/\rho_1) + (m_2/\rho_2) \quad [\ V = m/\rho]$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_1 + m_2}{(m_1/\rho_1) + (m_2/\rho_2)} = \frac{\Sigma m_i}{\Sigma(m_i/p_i)}$$

यदि $m_1 = m_2$ हो तो $\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ = हरात्मक माध्य

(7) यदि ρ_1 घनत्व वाले द्रव के आयतन V_1 को ρ_2 घनत्व वाले द्रव में V_2 आयतन में मिलाया जाये तब

$$m = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \text{ और } V = V_1 + V_2 \quad [\ \rho = m/V]$$

यदि $V_1 = V_2 = V$ हो तो $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ = समांतर माध्य

(8) ताप वृद्धि के कारण, वस्तु में प्रसार होता है अतः वस्तु के आयतन में वृद्धि होती है जबकि द्रव्यमान अपरिवर्तित रहता है अतः घनत्व घटता है

अर्थात् $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(m/V)}{(m/V_0)} = \frac{V_0}{V} = \frac{V_0}{V_0(1+\gamma\Delta\theta)}$ [$V = V_0(1+\gamma\Delta\theta)$]

या $\rho = \frac{\rho_0}{(1+\gamma\Delta\theta)} \simeq \rho_0(1-\gamma\Delta\theta)$

(9) दाब बढ़ाने पर, किसी वस्तु का आयतन घटता है अतः घनत्व बढ़ेगा अर्थात

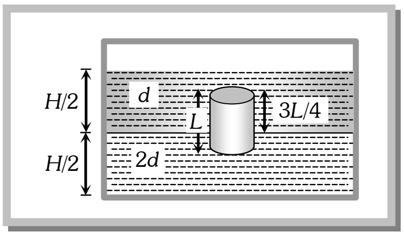
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(m/V)}{(m/V_0)} = \frac{V_0}{V} \quad [\ \rho = \frac{m}{V}\ ]$$

परन्तु आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की परिभाषा से,

$$B = -V_0\frac{\Delta p}{\Delta V} \text{ अर्थात्, } V = V_0\left[1-\frac{\Delta p}{B}\right]$$

अतः $\rho = \rho_0\left(1-\frac{\Delta p}{B}\right)^{-1} \simeq \rho_0\left(1+\frac{\Delta p}{B}\right)$

Problem 9. $L(L<H/2)$ लम्बाई का एक समांगी ठोस बेलन के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A/5$ है। बेलन द्रव–द्रव सम्पर्क सतह पर तैर रहा है। बेलन का अक्ष ऊर्ध्वाधर है। चित्रानुसार, बेलन की $L/4$ लम्बाई अधिक घनत्व वाले द्रव में डूबी है कम घनत्व वाला द्रव वायुमण्डल में खुला है। वायुमण्डलीय दाब P_0 हो तो ठोस का घनत्व होगा, [IIT-JEE 1995]



(a) $\frac{5}{4}d$

(b) $\frac{4}{5}d$

(c) Ad

(d) $\frac{d}{5}$

Solution : (a) बेलन का भार = द्रव के कारण 'उछाल बल'

$$V\times D\times g = \left(\frac{A}{5}.\frac{3}{4}L\right)\times d\times g + \left(\frac{A}{5}.\frac{L}{4}\right)\times 2d\times g \Rightarrow \left(\frac{A}{5}.L\right)D.g = \frac{A\,L\,d\,g}{4} \Rightarrow \frac{D}{5} = \frac{d}{4} \quad \therefore D = \frac{5}{4}d$$

Problem 10. बर्फ का घनत्व ρ व जल का घनत्व σ है। बर्फ के M द्रव्यमान के पिघलने पर इसके आयतन में कमी होगी।

(a) $\frac{M}{\sigma-\rho}$ (b) $\frac{\sigma-\rho}{M}$ (c) $M\left[\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right]$ (d) $\frac{1}{M}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right]$

Solution : (c) बर्फ का आयतन $= \frac{M}{\rho}$, जल का आयतन $= \frac{M}{\sigma}$ $\therefore$आयतन परिवर्तन $= \frac{M}{\rho}-\frac{M}{\sigma} = M\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)$

Problem 11. जल एवं घनत्व 2 वाले द्रव की समान मात्राएँ मिलाने पर मिश्रण का घनत्व होगा

(a) 2/3 (b) 4/3 (c) 3/2 (d) 3

Solution : (b) यदि समान द्रव्यमान व भिन्न घनत्वों के दो द्रव मिलाये जाएँ तो मिश्रण का घनत्व

$$\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2} = \frac{2\times1\times2}{1+2} = \frac{4}{3}$$

Problem 12. समान आयतन तथा ρ_1 व ρ_2 घनत्व के दो पदार्थ मिलाये जायें तो मिश्रण का आपेक्षिक घनत्व 4 हो जाता है। जब इन समान द्रव्यमान को मिलाया जाये तो मिश्रण का आपेक्षिक घनत्व 3 हो जाता है। ρ_l और ρ_2 के मान होंगे

(a) $\rho_1 = 6$ और $\rho_2 = 2$ (b) $\rho_1 = 3$ और $\rho_2 = 5$

(c) $\rho_1 = 12$ और $\rho_2 = 4$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (a) द्रवों को समान आयतन मिलाने पर घनत्व $= \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 4 \Rightarrow \rho_1 + \rho_2 = 8$ ....(i)

द्रवों को समान द्रव्यमान मिलाने पर घनत्व $= \dfrac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 3 \Rightarrow 2\rho_1\rho_2 = 3(\rho_1 + \rho_2)$ ....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से $\rho_1 = 6$ व $\rho_2 = 2$

Problem 13. वस्तु (घनत्व d_1) का वायु (घनत्व *d*) में भार किसी d_2 घनत्व व Mg भार वाली दूसरी वस्तु के समान है तो उसका वास्तविक द्रव्यमान क्या होगा

(a) M (b) $M\left(1 - \dfrac{d}{d_2}\right)$ (c) $M\left(1 - \dfrac{d}{d_1}\right)$ (d) $\dfrac{M(1 - d/d_2)}{(1 - d/d_1)}$

Solution : (d) माना M_0 = वस्तु का निर्वात में द्रव्यमान

वायु में वस्तु का आभासी भार = प्रमाणिक भार का वायु में भार

$\Rightarrow$ वास्तविक भार – प्रतिस्थापित वायु द्वारा उत्प्लावन = वास्तविक भार – प्रतिस्थापित वायु द्वारा उत्प्लावन

$$\Rightarrow M_0 g - \left(\frac{M_0}{d_1}\right)dg = Mg - \left(\frac{M}{d_2}\right)dg \Rightarrow M_0 = \frac{M\left[1 - \dfrac{d}{d_2}\right]}{\left[1 - \dfrac{d}{d_1}\right]}$$

पास्कल का नियम

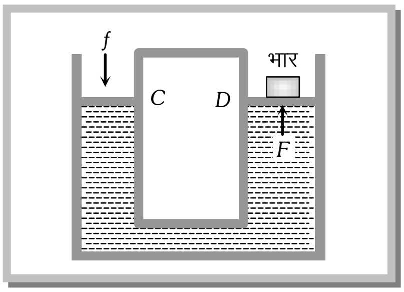
इस नियमानुसार यदि गुरुत्व नगण्य मानें तो साम्यावस्था में द्रव में प्रत्येक बिन्दु पर दाब समान होगा

या

यदि गुरुत्व नगण्य हो तो पात्र में रखे द्रव के किसी एक बिन्दु पर दाब बढ़ाने पर, दाब द्रव के सभी बिन्दुओं व पात्र की दीवारों पर समान रूप से संचरित होता है।

उदाहरण: हाइड्रॉलिक लिफ्ट, हाइड्रॉलिक प्रेस व हाइड्रॉलिक ब्रेक।

हाइड्रॉलिक लिफ्ट की कार्यविधि : यह भारी वस्तुओं को उठाने के लिए प्रयुक्त होती हैं।



यदि एक कम परिमाण का बल f पिस्टन C पर आरोपित करें तब द्रव पर आरोपित दाब

$P = f/a$ [a पिस्टन C के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल]

यह दाब समान रूप से पिस्टन D पर संचरित होगा

$$F = PA = \frac{f}{a}A = f\left(\frac{A}{a}\right)$$

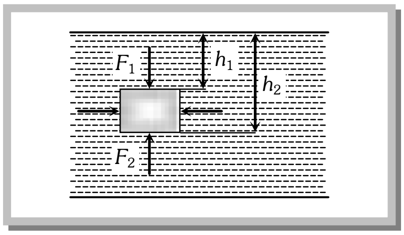
यदि $A >> a$, हो तो $F >> f$ अतः बड़े पिस्टन पर रखा भार कम परिमाण के बल द्वारा आसानी से उठाया जा सकता है।

आर्किमिडीज सिद्धांत

आर्किमिडीज ने खोजा कि जब एक पिण्ड पूर्णतः या आंशिक रूप से किसी स्थिर तरल में डुबोया जाता है तो उस पर एक उत्प्लावक बल कार्य करता है जो पिण्ड द्वारा विस्थापित तरल के भार के तुल्य होता है। यही आर्किमिडीज का सिद्धांत है। यह द्रव स्थैतिकी का एक महत्वपूर्ण सिद्धांत है।

जब एक पिण्ड आंशिक रूप से या पूर्णतः किसी तरल में डुबोया जाता है तो तरल पिण्ड पर द्रव स्थैतिक दाब आरोपित करता है। पिण्ड की किसी सतह पर तरल द्वारा आरोपित बल सतह के लम्बवत् होता है तथा परिमाण में उस बिन्दु पर उस सतह पर आरोपित दाब व सतह के क्षेत्रफल के गुणनफल के तुल्य होता है। इस प्रकार के सभी नियत बलों का परिणामी उत्प्लावक बल कहलाता है।

उत्प्लावक बल का परिमाण व दिशा ज्ञात करने के लिए माना σ घनत्व के तरल में एक वस्तु चित्रानुसार डूबी है । ऊर्ध्वाधर सतहों पर लगने वाले बल एक–दूसरे को निरस्त कर देंगे। ऊपर की सतह नीचे की ओर एक बल का अनुभव करेगी



$F_1 = AP_1 = A(h_1\sigma g + P_0)$ $\qquad [\ P = h\sigma g + P_0]$

जबकि निचली सतह ऊपर की ओर एक बल का अनुभव करेगी

$F_2 = AP_2 = A(h_2\sigma g + P_0)$

$h_2 > h_1, F_2$ का मान F_1 से अधिक होगा अतः पिण्ड ऊपर की ओर एक परिणामी बल का अनुभव करेगा,

$F = F_2 - F_1 = A\sigma g(h_2 - h_1)$

यदि पिण्ड की उर्ध्वाधर ऊँचाई L हो तो $F = A\sigma gL = V\sigma g$ $\qquad [\ V = AL = A(h_2 - h_1)]$

अतः F = पिण्ड द्वारा विस्थापित तरल का भार

यह बल ही उत्प्लावक बल कहलाता है। उत्प्लावक बल पिण्ड के भार के विपरीत, प्रतिस्थापित तरल के गुरुत्व केन्द्र (उत्प्लावक केन्द्र) से होकर ऊपर की ओर क्रियाशील होता है। यद्यपि उपरोक्त परिणाम तरल में पूर्णतः डूबी वस्तु के लिए प्राप्त किया गया है परन्तु यह आंशिक रूप से डूबी या एक से अधिक तरलों में डूबी वस्तु के लिए भी सत्य है।

(1) उत्प्लावक बल पिण्ड के द्रव्यमान, आकार, घनत्व आदि पर निर्भर नहीं करता हैं, केवल पिण्ड के द्रव में डूबें हुए आयतन पर निर्भर करता है।

(2) उत्प्लावक बल प्रतिस्थापित तरल की प्रकृति पर निर्भर करता है। इसी कारण समुद्र में पूर्णतः डूबी किसी वस्तु पर उत्प्लावक बल, शुद्ध जल में डूबी किसी वस्तु पर लगने वाले उत्प्लावक बल से अधिक होता है क्योंकि इसका घनत्व शुद्ध जल के घनत्व से अधिक होता है।

(3) ρ घनत्व के पिण्ड को जब σ घनत्व के तरल में डुबोया जाता है तो

आभासी भार = वास्तविक भार – उत्प्लावक बल $= W - F_{up} = V\rho g - V\sigma g = V(\rho - \sigma)g = V\rho g\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)$

$$\therefore \quad W_{APP} = W\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)$$

(4) यदि किसी पिण्ड का आयतन V है इसे σ घनत्व के द्रव में डुबोया जाए तो उसका भार घट जाता है।

W_1 = वायु में पिण्ड का भार $\quad W_2$ = जल में पिण्ड का भार

भार में आभासी कमी $W_1 - W_2 = V\sigma g \quad \therefore \quad V = \frac{W_1 - W_2}{\sigma g}$

(5) किसी पिण्ड का आपेक्षिक घनत्व (R.D.) $= \dfrac{\text{पिण्ड का घनत्व}}{\text{जल का घनत्व}} = \dfrac{\text{पिण्ड का भार}}{\text{समान आयतन के जल का भार}} = \dfrac{\text{पिण्ड का भार}}{\text{जल का उत्प्लावन}}$

$= \dfrac{\text{पिण्ड का भार}}{\text{जल पिण्ड के भार में कमी}} = \dfrac{\text{वायु में पिण्ड का भार}}{\text{पिण्ड का वायु में भार} - \text{जल में भार}} = \dfrac{W_1}{W_1 - W_2}$

(6) यदि जल में किसी पिण्ड के भार में कमी 'a' जबकि किसी अन्य द्रव में कमी 'b' हो तो

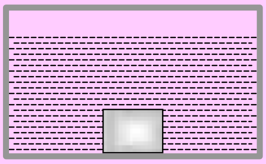
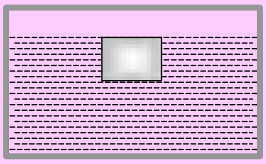
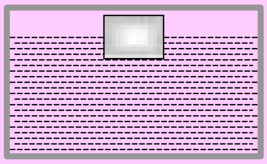
$$\therefore\ \frac{\sigma_L}{\sigma_W}=\frac{\text{द्रव में पिण्ड पर उत्प्लावन बल}}{\text{जल में पिण्ड पर उत्प्लावन बल}}=\frac{\text{द्रव में भार में कमी}}{\text{जल में भार में कमी}}=\frac{a}{b}=\frac{W_{\text{air}}-W_{\text{liquid}}}{W_{\text{air}}-W_{\text{water}}}$$

किसी पिण्ड का तैरना

(1) **रेखीय साम्य :** जब ρ घनत्व व V आयतन वाला कोई पिण्ड σ घनत्व के द्रव में डुबोया जाता है तो पिण्ड पर निम्न बल कार्य करते हैं

पिण्ड का भार $W = mg = V\rho g$ पिण्ड के गुरुत्व केन्द्र से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर

उत्प्लावक बल = $V\sigma g$ प्रतिस्थापित द्रव के गुरुत्व केन्द्र (उत्प्लावक केन्द्र) से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर

यदि पिण्ड का घनत्व द्रव के घनत्व से अधिक हो तो $\rho > \sigma$  भार, उत्प्लावक बल से अधिक होगा अतः पिण्ड डूब जाएगा।	यदि पिण्ड का घनत्व द्रव के घनत्व के तुल्य हो तो $\rho = \sigma$  भार, उत्प्लावक बल के तुल्य होगा अतः पिण्ड पूर्णतः डूब कर उदासीन साम्यावस्था में कहीं भी तैरता रहेगा।	यदि पिण्ड का घनत्व द्रव के घनत्व से कम हो तो $\rho < \sigma$  भार उत्प्लावक बल से कम होगा अतः पिण्ड आंशिक रूप से डूबकर साम्यावस्था में तैरता रहेगा $W = V_{in}\sigma g \Rightarrow V\rho g = V_{in}\sigma g$ $V\rho = V_{in}\sigma$ जहाँ V_{in} द्रव में डूबे पिण्ड का आयतन है।

Important points

(i) एक पिण्ड द्रव में तैरेगा यदि और केवल यदि $\rho \le \sigma$

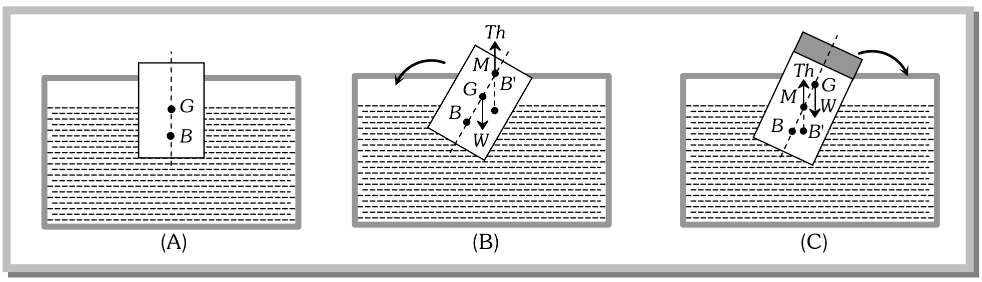
(ii) पिण्ड के तैरने की स्थिति में पिण्ड का भार = उत्प्लावक बल

अतः W_{App} = वास्तविक भार – उत्प्लावक बल = 0

(iii) तैरने की स्थिति में $V\rho g = V_{in}\sigma g$

अतः तैरने की साम्यावस्था g से प्रभावित नहीं होती क्योंकि उत्प्लावक बल व भार दोनों g पर निर्भर करते हैं।

(2) **घूर्णी साम्यावस्था :** जब किसी तैरते हुए पिण्ड को साम्यावस्था से कुछ विस्थापित किया जाता है तो उत्प्लावन केन्द्र परिवर्तित हो जाता है। नये उत्प्लावन केन्द्र B' व प्रारम्भिक ऊर्ध्वाधर रेखा एक बिन्दु M पर मिलती है जिसे मित–केन्द्र (metacentre) कहते हैं। यदि मित–केन्द्र M गुरुत्व केन्द्र के ऊपर हो तो बिन्दु G पर बल (पिण्ड का भार W) व बिन्दु B' पर बल (उत्प्लावक बल) मिलकर बलयुग्म का निर्माण करेंगे जो पिण्ड को पूर्वावस्था में ले आएगा। अतः तैरते हुए पिण्ड की घूर्णी साम्यावस्था के लिए मित केन्द्र M सदैव गुरुत्व केन्द्र के ऊपर होना चाहिए।



परन्तु, यदि मित केन्द्र M, गुरूत्व केन्द्र से नीचे हो तो बिन्दु G व B' पर बलों का युग्म तैरती वस्तु को गिरा देगा।

यही कारण है कि लकड़ी का लट्ठा पानी में ऊर्ध्वाधर नहीं तैर सकता। एक नाव उलटने लगती है यदि उसमें बैठा यात्री खड़ा हो जाए। इन स्थितियों में मित केन्द्र M, गुरुत्व केन्द्र से नीचे होता है अतः साम्यावस्था से थोड़ा भी विस्थापित करने पर पिण्ड गिर जाता है।

(3) पिण्ड के तैरने के अनुप्रयोग

(i) जब कोई पिण्ड किसी द्रव में तैरता है तो पिण्ड का भार = उत्प्लावक बल

$$V\rho g = V_{in}\sigma g \Rightarrow V_{in} = \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)V \quad \therefore \quad V_{out} = V - V_{in} = \left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)V$$

अर्थात् द्रव के बाहर पिण्ड का आँशिक आयतन $f_{out} = \frac{V_{out}}{V} = \left[1-\frac{\rho}{\sigma}\right]$

(ii) तैरने के लिए $V\rho = V_{in}\sigma \Rightarrow \rho = \frac{V_{in}}{V}\sigma = f_{in}\sigma$

यदि पिण्ड A व B समान द्रव में तैरते हों तो $\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{(f_{in})_A}{(f_{in})_B}$

(iii) यदि समान पिण्ड σ_A व σ_B घनत्व के विभिन्न द्रवों में तैरता हो तो

$$V\rho = (V_{in})_A\sigma_A = (V_{in})_B\sigma_B \qquad \therefore \qquad \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{(V_{in})_B}{(V_{in})_A}$$

(iv) यदि M द्रव्यमान का एक प्लेटफार्म जिसका अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल A हो, σ घनत्व वाले द्रव में तैर रहा हो व इसकी द्रव में h ऊँचाई हो तो

$$Mg = hA\sigma g \qquad ......(i)$$

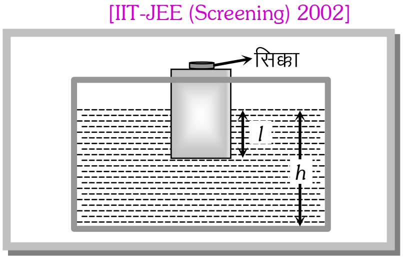
अब यदि m द्रव्यमान का पिण्ड इस पर रखा जाए और प्लेटफार्म y ऊँचाई तक और डूब जाए तो

$$(M+m)g = (y+h)A\sigma g \qquad ......(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से $mg = A\sigma y g$, i.e., $W \propto y$ ......(iii)

अतः हम किसी तैरते हुए प्लेटफार्म पर रखे पिण्ड का भार, उसके द्वारा प्लेटफार्म के द्रव में डूबी ऊँचाई से ज्ञात कर सकते हैं।

Problem 14. लकड़ी का एक गुटका पानी में चित्रानुसार तैर रहा है। उसके उच्च तल पर एक सिक्का रखा है। दूरियाँ l व h प्रदर्शित हैं। यदि कुछ समय पश्चात् सिक्का पानी में गिर जाए तो [IIT-JEE (Screening) 2002]



(a) l का मान घटेगा व h बढ़ेगा
(b) l का मान बढ़ेगा व h घटेगा
(c) l व h दोनों बढ़ेंगे
(d) l व h दोनों घटेंगे

Solution : (d) सिक्का गिरने से गुटका ऊपर को सरकेगा अतः l घटेगा इसी प्रकार h भी घटेगा क्योंकि जब सिक्का पानी में होगा तो यह अपने आयतन के तुल्य आयतन के जल को ही विस्थापित करेगा।

Problem 15. एक अर्धगोलाकार कटोरा $1.2 \times 10^3 kg/m^3$ घनत्व के द्रव में बिना डूबे तैर रहा है। कटोरे का बाह्य व्यास व घनत्व क्रमशः $1\ m$ व $2 \times 10^4\ kg/m^3$ हैं। कटोरे का व्यास त्रिज्या होगा

(a) 0.94 m (b) 0.97 m (c) 0.98 m (d) 0.99 m

Solution : (c) कटोरे का भार $= mg = V\rho g = \frac{4}{3}\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^3\right]\rho g$

जहाँ D बाह्य व्यास, d आंतरिक व्यास व ρ कटोरे का घनत्व है।

कटोरे द्वारा प्रतिस्थापित द्रव का भार $= V\sigma g = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \sigma g$ जहाँ σ द्रव का घनत्व है।

तैरने के लिए $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \sigma g = \frac{4}{3}\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^3\right]\rho g \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1.2\times 10^3 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^3\right] 2\times 10^4$

हल करने पर $d = 0.98\, m.$

Problem 16. किसी मिश्र धातु के निर्माण में, द्रव्यमान m_1 व आपेक्षिक घनत्व s_1 वाले पदार्थ के साथ द्रव्यमान m_2 व आपेक्षिक घनत्व s_2 का अन्य पदार्थ मिलाया जाता है तो मिश्रधातु का आपेक्षिक घनत्व होगा [CPMT 1995]

(a) $\left(\frac{m_1 + m_2}{s_1 + s_2}\right)$ (b) $\left(\frac{s_1 s_2}{m_1 + m_2}\right)$ (c) $\frac{m_1 + m_2}{\left(\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2}\right)}$ (d) $\frac{\left(\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2}\right)}{m_1 + m_2}$

Solution : (c) मिश्रधातु का आपेक्षिक घनत्व $= \frac{\text{मिश्रधातु का घनत्व}}{\text{जल का घनत्व}} = \frac{\text{मिश्रधातु का द्रव्यमान}}{\text{मिश्रधातु का आयतन} \times \text{जल का घनत्व}}$

$= \frac{m_1 + m_2}{\left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right)\times \rho_w} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\rho_1/\rho_w} + \frac{m_2}{\rho_2/\rho_w}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2}}$ $\left[\text{चूँकि पदार्थ का आपेक्षिक घनत्व} = \frac{\text{पदार्थ का घनत्व}}{\text{जल का घनत्व}}\right]$

Problem 17. R त्रिज्या का कंक्रीट (Concrete) का गोला बीच में खोखला है। खोखले भाग की त्रिज्या r है व उसमें लकड़ी का बुरादा भरा है। कंक्रीट व लकड़ी के बुरादे के आपेक्षिक घनत्व क्रमशः 2.4 व 0.3 हैं गोला पूरी तरह जल में डूबकर तैर रहा है। कंक्रीट व लकड़ी के बुरादे के द्रव्यमानों का अनुपात होगा [AIIMS 1995]

(a) 8 (b) 4 (c) 3 (d) शून्य

Solution : (b) माना कांक्रीट व लकड़ी के बुरादे के आपेक्षिक घनत्व क्रमशः ρ_1 व ρ_2 होंगे। तैरने के नियमानुसार, सम्पूर्ण गोले का भार = गोले पर उत्प्लावक बल

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho_1 g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2 g = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 1 \times g \Rightarrow R^3\rho_1 - r^3\rho_1 + r^3\rho_2 = R^3$$

$$\Rightarrow \quad R^3(\rho_1 - 1) = r^3(\rho_1 - \rho_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{R^3}{r^3} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^3 - r^3}{r^3} = \frac{\rho_1 - \rho_2 - \rho_1 + 1}{\rho_1 - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(R^3 - r^3)\rho_1}{r^3\rho_2} = \left(\frac{1 - \rho_2}{\rho_1 - 1}\right)\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

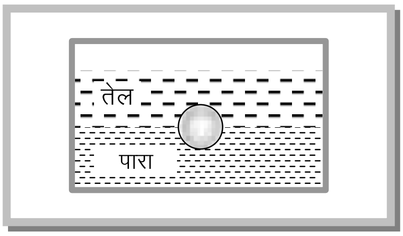
$$\Rightarrow \frac{\text{कंक्रीट का द्रव्यमान}}{\text{लकडी के बुरादे का द्रव्यमान}} = \left(\frac{1 - 0.3}{2.4 - 1}\right)\times \frac{2.4}{0.3} = 4$$

Problem 18. किसी पात्र में पारे (घनत्व = 13.6 gm/cm^3) के ऊपर तेल (घनत्व = 0.8 gm/cm^3) भरा है। एक समांगी गोला इसमें इस प्रकार तैर रहा है कि उसका आधा आयतन पारे व आधा तेल में डूबा है। गोले के पदार्थ का घनत्व gm/cm^3 होगा [IIT-JEE 1988]

(a) 3.3 (b) 6.4 (c) 7.2 (d) 12.8

Solution : (c) चूँकि गोला द्रव में तैर रहा है अतः इसका भार इस पर कार्यरत उत्प्लावक बल के तुल्य होगा।

गोले का भार $= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$ ...... (i)

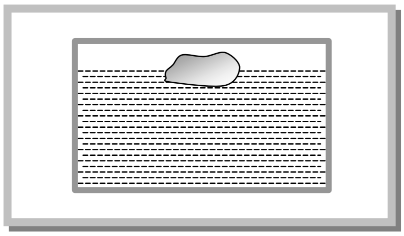


तेल व पारे के कारण उत्प्लावक बल $= \frac{2}{3}\pi R^3 \times \sigma_{oil} g + \frac{2}{3}\pi R^3 \sigma_{Hg} g$ ......(ii)

समीकरण (i)व (ii) से

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{2}{3}\pi R^3 0.8g + \frac{2}{3}\pi R^3 \times 13.6g \Rightarrow 2\rho = 0.8 + 13.6 = 14.4 \Rightarrow \rho = 7.2$$

Problem 19. किसी बीकर में रखे द्रव में कोई पिण्ड तैर रहा है। सम्पूर्ण निकाय (चित्रानुसार) गुरुत्व के अधीन मुक्त रूप से गिर रहा है। द्रव के कारण पिण्ड पर उत्प्लावक बल होगा [IIT-JEE 1982]



(a) शून्य
(b) प्रतिस्थापित द्रव के भार के तुल्य
(c) वायु में पिण्ड के भार के तुल्य
(d) पिण्ड के द्रव में डूबे भाग के भार के तुल्य

Solution : (a) उत्प्लावक बल $= V\rho_{\text{liquid}}(g - a)$; जहाँ, a = नीचे की ओर त्वरण, V = विस्थापित द्रव का आयतन

गुरुत्व के अधीन मुक्त गति में $a = g$ $\therefore$ उत्प्लावक बल $= 0$

Problem 20. किसी धात्विक गुटके की विमाऐं $5\ cm \times 5\ cm \times 5\ cm$ व उसके पदार्थ का घनत्व $5\ gm\ cm^{-3}$ है। गुटके का जल में आभासी भार होगा

(a) $5 \times 5 \times 5 \times 5\ gf$ (b) $4 \times 4 \times 4 \times 4\ gf$ (c) $5 \times 4 \times 4 \times 4\ gf$ (d) $4 \times 5 \times 5 \times 5\ gf$

Solution : (d) आभासी भार $= V(\rho - \sigma)g = l \times b \times h \times (5-1) \times g = 5 \times 5 \times 5 \times 4 \times g\ Dyne$ या $4 \times 5 \times 5 \times 5\ gf$.

Problem 21. $1000\ cm^3$ आयतन का लकड़ी का गुटका स्प्रिंग तुला से लटका है। वायु में इसका भार $12\ N$ है। यह जल में इस प्रकार लटकाया जाता है कि आधा गुटका जल सतह के नीचे रहे। स्प्रिंग तुला का पाठ्यांक होगा

(a) $10\ N$ (b) $9\ N$ (c) $8\ N$ (d) $7\ N$

Solution : (d) स्प्रिंग तुला का पाठ्यांक = गुटके का आभासी भार = वास्तविक भार – उत्प्लावक बल

$$= 12 - V_{in}\sigma g = 12 - 500 \times 10^{-6} \times 10^3 \times 10 = 12 - 5 = 7N.$$

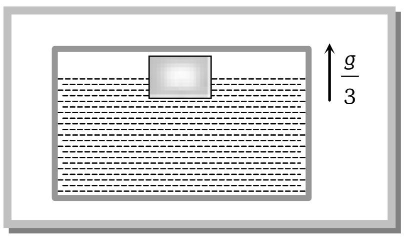
Problem 22. एक हिमखण्ड समुद्री जल में बह रहा है। हिम का घनत्व $0.92\ gm/cm^3$ व समुद्री जल का घनत्व $1.03 g/cm^3$ है। हिमखण्ड का कितने प्रतिशत भाग जल सतह से नीचे होगा

(a) 3% (b) 11% (c) 89% (d) 92%

Solution : (c) हिम खण्ड के तैरने के लिए, हिमखण्ड का भार = प्रतिस्थापित जल का भार

$$V\rho g = V_{in}\sigma g \Rightarrow V_{in} = \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)V = \left(\frac{0.92}{1.03}\right)V = 0.89V \quad \therefore \frac{V_{in}}{V} = 0.89 \text{ या } 89\%$$

Problem 23. एक घनाकार पिण्ड किसी द्रव में इस प्रकार तैर रहा है कि उसका आधा आयतन द्रव में डूबा है। यदि सम्पूर्ण निकाय ऊपर की ओर त्वरित ($a=g/3$) हो तो पिण्ड का वह भाग जो द्रव में डूबा है होगा



(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{3}{8}$
(c) $\frac{2}{3}$
(d) $\frac{3}{4}$

Solution : (a) द्रव में डूबा आंशिक आयतन $V_{in} = \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)V$ अर्थात् यह पिण्ड व द्रव के घनत्व पर निर्भर करता है। अतः निकाय के नियत वेग से या किसी त्वरण से ऊपर या नीचे जाने का पिण्ड के डूबे भाग पर कोई प्रभाव नहीं होगा।

Problem 24. चाँदी का 2.1 *kg* भार का टुकड़ा किसी धागे की सहायता से आपेक्षिक घनत्व 0.8 वाले द्रव में पूर्णतः डूबा है। धागे में तनाव (*kg-wt*) होगा

(a) 1.6 (b) 1.94 (c) 3.1 (d) 5.25

Solution : (b) आभासी भार $= V(\rho-\sigma)g = \frac{M}{\rho}(\rho-\sigma)g = M\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)g = 2.1\left(1-\frac{0.8}{10.5}\right)g = 1.94\, g$ *Newton* = 1.94 *Kg-wt*

Problem 25. धातु के किसी प्रादर्श का भार वायु में 210 *gm* जल में 180 *gm* व किसी द्रव में 120 *gm* है तो आपेक्षिक घनत्व (RD) होगा

(a) 3 धातु का (b) 7 धातु का

(c) 3 द्रव का (d) $\frac{1}{3}$ द्रव का

Solution : (b, c) माना धातु का घनत्व ρ व द्रव का घनत्व σ है।

यदि प्रादर्श का आयतन V हो तो प्रश्नानुसार,

$210 = V\rho g$ ....(i)

$180 = V(\rho-1)g$ ....(ii)

$120 = V(\rho-\sigma)g$ ....(iii)

(i), (ii) व (iii) से $\rho = 7$ तथा $\sigma = 3$.

Problem 26. दो ठोस *A* व *B* जल में तैर रहे हैं। *A* का आधा आयतन तथा *B* का 2/3 आयतन जल में है। *A* व *B* के घनत्वों की तुलना करो

(a) 4 : 3 (b) 2 : 3 (c) 3 : 4 (d) 1 : 3

Solution : (c) यदि दो भिन्न पिण्ड *A* व *B* समान द्रव में तैर रहे हों तो $\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{(f_{in})_A}{(f_{in})_B} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$

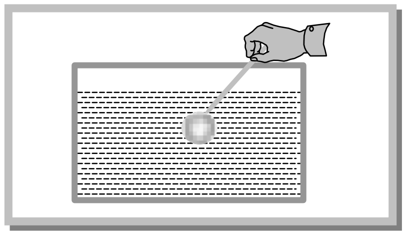
Problem 27. V_0 आयतन व d_0 घनत्व का पिण्ड d घनत्व वाले द्रव में तैर रहा है पिण्ड के आयतन का वह भाग जो द्रव की सतह के ऊपर है होगा

(a) $\frac{d_0}{d}$ (b) $\frac{dd_0}{d+d_0}$ (c) $\frac{d-d_0}{d}$ (d) $\frac{dd_0}{d-d_0}$

Solution : (c) तैरने के लिए $V_0 d_0 g = V_{in}\, d\, g \Rightarrow V_{in} = V_0\frac{d_0}{d}$

$\therefore\ V_{out} = V_0 - V_{in} = V_0 - V_0\frac{d_0}{d} = V_0\left[\frac{d-d_0}{d}\right] \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_0} = \frac{d-d_0}{d}$.

Problem 28. जल से भरा पात्र तुला पर रखा है व तुला का पाठ 600 *g* है। अब 40 *g* की एक गेंद (घनत्व 0.80 *g/cc*) चित्रानुसार जल में डुबोयी जाती है। तो तुला का पाठ्यांक होगा



(a) 600 *g*

(b) 550 *g*

(c) 650 *g*

(d) 632 *g*

Solution : (c) गेंद पर उत्प्लावक बल = प्रतिस्थापित द्रव का भार

$$= V\,\sigma\,g = \left(\frac{m}{\rho}\right)\sigma\,g = \frac{40}{0.8} \times 1 \times g = 50g \; Dyne \text{ या } 50\; gm$$

चूँकि गेंद पानी में डुबोयी जाती है अतः इस पर उत्प्लावक बल के तुल्य बल आरोपित करना होगा।

अतः तुला का पाठ = जल का भार + उत्प्लावन के विरूद्ध बल = 600 + 50 = 650 *gm*

Que.1 लोहे की एक छोटी सुई जल में डूब जाती है जबकि लोहे का ही बड़ा जहाज तैरता रहता है। क्यों ?

Ans. *तैरने के लिए, पिण्ड का घनत्व द्रव के घनत्व के तुल्य या उससे कम होना चाहिए। सुई का घनत्व (अर्थात लोहे का) जल से अधिक होता है अतः वह जल में डूब जाती है जबकि अधिक आयतन के कारण जहाज का घनत्व जल के घनत्व से कम होता है अतः वह तैरता रहता है।*

Que.2 झील में तैरती किसी नाव पर एक मनुष्य बैठा है। यदि मनुष्य झील से कुछ जल पी लेता है तो झील के जल स्तर पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

Ans. *यदि मनुष्य झील से mg जल पी लेता है तो मनुष्य + नाव निकाय का भार mg बढ़ जाता है अतः निकाय तैरने के लिए अतिरिक्त (mg) जल प्रतिस्थापित करेगा। अतः झील से जल निकलने के कारण जल स्तर नीचे गिरेगा परन्तु तैरने वाले निकाय के कारण अधिक द्रव का प्रतिस्थापन होगा अतः जल स्तर बढ़ेगा अर्थात झील में जल स्तर अपरिवर्तित रहेगा।*

Que.3 यदि एक लड़का एक हाथ में एक मछली व दूसरे हाथ में जल से भरी बाल्टी ले जाता है। वह आर्किमिडीज सिद्धान्त के बारे में सोचकर मछली जल से भरी बाल्टी में डाल देता है ताकि उत्प्लावन के कारण मछली का भार व अंततः उसके द्वारा ले जाने वाला भार कम हो जाए। क्या वह सही सोच रहा है ?

Ans. *नहीं, जब वह मछली जल से भरी बाल्टी में डालता है तो उत्प्लावन के कारण मछली भार तो कम हो जाता है परन्तु (जल + बाल्टी) का भार समान मात्रा में बढ़ जाता है अतः उसके द्वारा ले जाने वाला भार अपरिवर्तित रहता है।*

Que. 4 जल से भरी एक बाल्टी स्प्रिंग तुला से लटकायी जाती है। क्या तुला का पाठ परिवर्तित होगा (a) जब किसी डोरी की सहायता से एक पत्थर जल में इस प्रकार डुबोयें कि वह बाल्टी को न लगे (b) जब लोहे या कॉर्क का टुकड़ा जल में छोड़ दिया जाए ?

Ans. (a) *हाँ, तुला का पाठ बढ़ेगा व पाठ में परिवर्तन पत्थर के भार में कमी के तुल्य होगा नाकि पत्थर के भार के।*

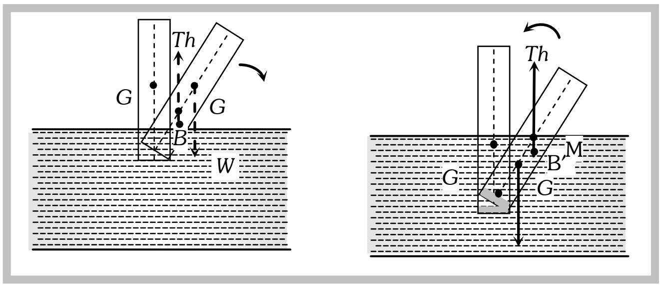
(b) *हाँ, तुला के पाठ में परिवर्तन लोहे या कॉर्क के टुकड़े के भार के तुल्य होगा।*

Que. 5 वायुमण्डलीय दाब पर, एक खाली व वायु से भरा प्लास्टिक बैग का भार समान होता है। क्या निर्वात में भी उपरोक्त स्थितियों में भार समान होंगे ?

Ans. *माना खाली बैग का भार W_0 व आयतन V है। जब बैग NTP पर वायु घनत्व ρ से भरा जाता है तो बैग भार में $V\rho g$ बढ़ जाता है। जब वायु से भरा बैग वायु में तौला जाता है तो उसका भार वायु के उत्प्लावन के कारण $V\rho g$ घट जाता है अर्थात् $W = W_0 + V\rho g - V\rho g = W_0$, अर्थात् वायु से भरे बैग के भार में वायु में कोई परिवर्तन नही होता लेकिन यदि बैग को निर्वात में तौला जाये तो खाली बैग का भार W_0 व वायु से भरे बैग का भार $(W_0 + V\rho g)$ होगा (क्योंकि उत्प्लावन अनुपस्थित है)। अर्थात निर्वात् में वायु से भरा बैग, खाली बैग की अपेक्षा भारी होगा।*

Que.6 लकड़ी का लट्ठा जल में क्षैतिज अवस्था में तैरता है क्यों ? यदि एक सिरे पर पर्याप्त लोहा संलग्न कर दें तो वह उर्ध्वाधर तैरने लगता है, इसे भी स्पष्ट करें।

Ans. *जब लकड़ी का एक लट्ठा जल में ऊर्ध्वाधर रखा जाता है तो घूर्णी साम्य अस्थायी होता है क्योंकि इसका मित केन्द्र, गुरुत्व केन्द्र के नीचे होता है। इस अवस्था में इसे थोड़ा हिलाने पर उत्प्लावन व लट्ठे के भार के कारण बलयुग्म का निर्माण होता है जो लट्ठे को घुमाकर क्षैतिज कर देता है।*



परन्तु निचले सिरे पर भारी करने से लट्ठे का गुरुत्व केन्द्र, मित केन्द्र से नीचे होता है तथा साम्य स्थायी होता है। अर्थात यदि लट्ठे को थोड़ा भी हिलाया जाए तो वह पुनः अपनी पूर्वावस्था में आ जाता है।

Que.7 एक नाव कुछ द्रव्यपिण्डों को लेकर पानी में तैर रही है। यदि कुछ पिण्ड जल में फेंक दियें जाएें तो जल स्तर पर क्या प्रभाव पड़ेगा। यदि (a) पिण्ड जल पर तैरें (b) डूब जाऐं ?

Ans. *यदि M नाव का व m पिण्डों का द्रव्यमान है। प्रारम्भ में चूँकि निकाय तैर रहा है* $M + m = V_D \sigma_W$

अतः निकाय द्वारा विस्थापित जल $V_D = \dfrac{M}{\sigma_W} + \dfrac{m}{\sigma_W}$ ......(i)

जब पिण्ड जल में फेंके जाते हैं नाव तैरती रहती है अतः अब विस्थापित जल $M = V_1 \sigma_W$,

अर्थात् $V_1 = (M / \sigma_W)$

(a) अब यदि पिण्ड जल में तैरते हैं तो उनके द्वारा विस्थापित जल $m = V_2 \sigma_W$,

अर्थात् $V_2 = (m / \sigma_W)$

अतः नाव व पिण्डों द्वारा विस्थापित कुल जल

$$V_1 + V_2 = \frac{M}{\sigma_W} + \frac{m}{\sigma_W} \quad .....(ii)$$

जो कि प्रारम्भिक स्थिति (समी. (i)) में विस्थापित जल के तुल्य है। अर्थात जल स्तर अपरिवर्तित रहेगा।

(b) अब यदि पिण्ड जल में डूब जाते हैं तो विस्थापित जल का भार पिण्डों के भार के तुल्य होगा अर्थात्

$$V_2' = \frac{m}{\rho} \qquad H - (H - h) = h$$

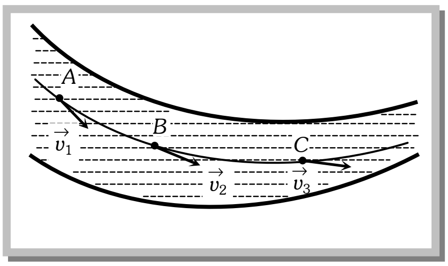
इस स्थिति में नाव व डूबे हुए पिण्डों द्वारा विस्थापित कुछ जल

$$V_1 + V_2' = \left(\frac{M}{\sigma_W} + \frac{m}{\rho}\right) \quad .....(iii)$$

अब चूँकि पिण्ड डूब जाते हैं $\rho > \sigma_W$, *अतः यह आयतन प्रारम्भिक स्थिति (समी. (i)) में विस्थापित जल से कुछ कम होगा अतः जल स्तर गिर जाएगा।*

उपरोक्त प्रश्न में यदि पिण्ड (डूबें या तैरें) भूमि पर अभारित किये जाऐं। तो अभारित किये जाने पर विस्थापित जल $V_2 = M / \sigma_W$ *पहले की तुलना* $V = (M + m) / \sigma_W$ *में कम होगा अतः जल स्तर गिरेगा।*

धारा रेखीय, पटलित व विक्षुब्ध प्रवाह



(1) **धारा रेखीय प्रवाह :** किस द्रव के धारा रेखीय प्रवाह में किसी एक ही बिन्दु से होकर गुजरने वाले द्रव के सभी कण समान वेग से एक ही मार्ग पर चलते हैं।

एक धारा रेखा किसी पथ (सरल या वक्र) के रूप में परिभाषित की जाती है। जिसमें किसी बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर द्रव के प्रवाह की दिशा व्यक्त करती है।

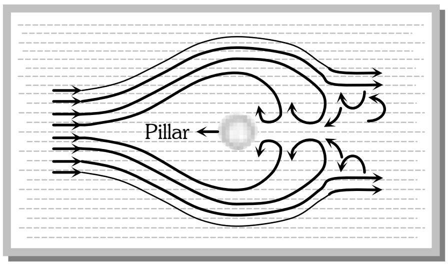
दो धारा रेखएँ कभी एक दूसरे को काटती नहीं हैं। किसी स्थान पर धारा रेखाओं की सघनता उस स्थान पर द्रव कणों के वेग की तीव्रता प्रदर्शित करती है।

पथ ABC चित्रानुसार एक धारा रेखा को प्रदर्शित करता है। υ_1, υ_2 व υ_3 द्रव कणों के क्रमशः बिन्दुओं A, B व C पर वेग हैं।

(2) पटलित प्रवाह : यदि एक द्रव किसी क्षैतिज सतह पर धारा रेखीय प्रवाह में भिन्न–भिन्न वेगों की पर्तों के रूप में बह रहा हो।

पर्तें आपस में मिलती न हों तो द्रव का प्रवाह पटलित प्रवाह कहलाता है। इस प्रवाह में द्रव प्रवाह का वेग सदैव द्रव के क्रांतिक वेग से कम होता है। पटलित प्रवाह प्रायः धारारेखीय प्रवाह का पर्यायवाची माना जाता है।

(3) विक्षुब्ध प्रवाह : जब द्रव प्रवाह का वेग उसके क्रांतिक वेग से अधिक होता है तो द्रव के कणों की गति अनियमित हो जाती है। इस प्रकार का प्रवाह विक्षुब्ध प्रवाह कहलाता है।



विक्षुब्ध प्रवाह में, द्रव के कणों का पथ व वेग समय के साथ लगातार अनियमित रूप से प्रत्येक बिन्दु पर बदलता रहता है। इस प्रकार के प्रवाह में प्रवाह संतुलित करने वाली अधिकतम ऊर्जा द्रव में भँवर उत्पन्न करने में खर्च हो जाती है। ऊर्जा का थोड़ा भाग ही द्रव को आगे की ओर प्रवाहित करता है। उदाहरण – नदी पर पुल के स्तम्भों पर भँवर (विक्षुब्ध प्रवाह) देखे जा सकते हैं।

क्रांतिक वेग व रेनाल्ड संख्या

क्रांतिक वेग किसी द्रव के प्रवाह का वह वेग है जिससे कम वेग पर द्रव का प्रवाह धारारेखीय व अधिक पर विक्षुब्ध हो जाता है।

रेनाल्ड संख्या एक विशुद्ध संख्या है जो किसी नली में द्रव के प्रवाह की प्रकृति बताती है।

किसी बहते तरल के लिए रेनाल्ड संख्या, प्रति एकांक क्षेत्रफल जड़त्वीय बल व प्रति एकांक क्षेत्रफल श्यान बल के अनुपात के तुल्य होती है।

$$N_R = \frac{\text{प्रति एकांक क्षेत्रफल जडत्वीय बल}}{\text{प्रति एकांक क्षेत्रफल श्यान बल}}$$

यदि r त्रिज्या व अनुप्रस्थ क्षेत्रफल A की नली से ρ घनत्व का द्रव प्रवाहित हो रहा हो तो नली से प्रति सैकण्ड प्रवाहित द्रव का द्रव्यमान $\frac{dm}{dt}$ = प्रति सैकण्ड प्रवाहित आयतन × घनत्व = $A\upsilon \times \rho$

$\therefore$ प्रति एकांक क्षेत्रफल जड़त्वीय बल $= \frac{dp/dt}{A} = \frac{\upsilon(dm/dt)}{A} = \frac{\upsilon A\upsilon\rho}{A} = \upsilon^2\rho$

व प्रति एकांक क्षेत्रफल श्यान बल $F/A = \frac{\eta\upsilon}{r}$

अतः रेनाल्ड संख्या की परिभाषा से $N_R = \frac{\text{प्रति एकांक क्षेत्रफल जडत्वीय बल}}{\text{प्रति एकांक क्षेत्रफल श्यान बल}} = \frac{\upsilon^2\rho}{\eta\upsilon/r} = \frac{\upsilon\rho r}{\eta}$

यदि रेनाल्ड संख्या

(i) 0 व 2000 के मध्य हो तो द्रव का प्रवाह धारारेखीय होगा।

(ii) 2000 व 3000 के मध्य हो तो द्रव का प्रवाह अस्थायी होगा अर्थात् धारारेखीय से विक्षुब्ध प्रवाह में परिवर्तित होगा।

(iii) 3000 से अधिक हो तो द्रव का प्रवाह निश्चित रूप से बिक्षुब्ध होगा।

Problem 29. निम्न में से किस स्थिति में नली में द्रव का प्रवाह अधिक रेखीय होगा

(a) कम त्रिज्या की नली से अत्यधिक श्यान व उच्च घनत्व का द्रव बहे।

(b) कम त्रिज्या की नली से अत्यधिक श्यान व कम घनत्व का द्रव बहे।

(c) ज्यादा त्रिज्या की नली से कम श्यानता व कम घनत्व का द्रव बहे।

(d) ज्यादा त्रिज्या की नली से कम श्यानता व कम घनत्व का द्रव बहे।

Solution : (b) धारा रेखीय प्रवाह हेतु रेनाल्ड संख्या $N_R \propto \frac{r\rho}{\eta}$ का मान कम होना चाहिए।

N_R के कम मान के लिए त्रिज्या, घनत्व कम व श्यानता अधिक होना चाहिए।

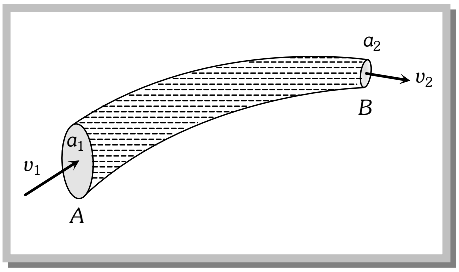
Problem 30. समान त्रिज्याओं की दो नलियों से दो भिन्न द्रव बह रहे हैं। द्रवों के श्यानता गुणांकों का अनुपात 52:49 व घनत्वों का अनुपात 13:1 है। उनके क्रांतिक वेगों का अनुपात होगा

(a) 4 : 49 (b) 49 : 4 (c) 2 : 7 (d) 7 : 2

Solution : (a) क्रांतिक वेग $v = N_R \frac{\eta}{\rho r} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \times \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{52}{49} \times \frac{1}{13} = \frac{4}{49}$

अविरतता का सिद्धान्त (सांतत्य समीकरण)

अविरतता का सिद्धान्त द्रव्यमान संरक्षण सिद्धान्त की सहायता से स्थापित किया जाता है। माना असमान परिच्छेद की नली AB से कोई अश्यान द्रव प्रवाहित हो रहा है। नली के बिन्दु A व B पर अनुप्रस्थ क्षेत्रफल क्रमशः a_1 व a_2 हैं माना द्रव नली में, बिन्दु A पर वेग v_1 से प्रवेश करता है व बिन्दु B पर v_2 वेग से बाहर निकलता है। बिन्दु A तथा B पर द्रव के घनत्व क्रमशः ρ_1 व ρ_2 हैं।



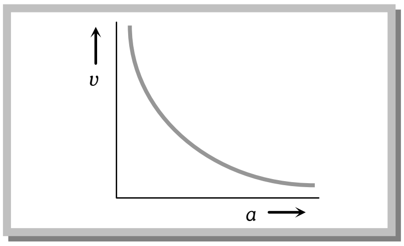
बिन्दु A से प्रति सैकण्ड प्रवेश करने वाले द्रव का द्रव्यमान = बिन्दु B से प्रति सैकण्ड बाहर निकलने वाले द्रव का आयतन

$a_1 v_1 \rho_1 = a_2 v_2 \rho_2$

$a_1 v_1 = a_2 v_2$ [यदि द्रव असम्पीड्य है $(\rho_1 = \rho_2)$]

या $av =$ नियतांक

या $a \propto \frac{1}{v}$



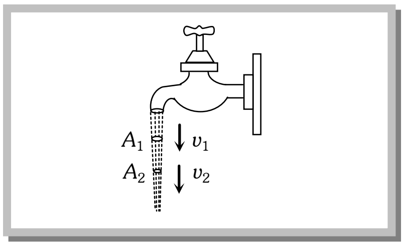
उक्त व्यंजक असम्पीड्य व अश्यान द्रवों के अध्ययन के लिए सांतत्य समीकरण कहलाता है।

(1) प्रवाह का वेग द्रव पर निर्भर नहीं करता (यदि द्रव को अश्यान मानें)।

(2) अनुप्रस्थ क्षेत्रफल घटाने पर प्रवाह वेग बढ़ता है तथा इसका विलोम भी सत्य है अत:

(a) पहाड़ी क्षेत्रों में जहाँ नदी संकीर्ण व उथली होती है (कम अनुप्रस्थ काट) है प्रवाह वेग अधिक होता है। जबकि मैदानी क्षेत्रों में यहाँ नदी चौड़ी व गहरी (अधिक अनुप्रस्थ काट) होती है। प्रवाह वेग कम होता है अतः गहरा पानी शांत प्रतीत होता है।

(b) जब नल से जल बहता है तो गुरुत्व के कारण गिरते द्रव का वेग बढ़ता है अतः अविरतता के सिद्धान्त से जल की धार का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल कम हो जाता है।



Problem 31. 2 *cm* व 4 *cm* व्यास की दो नलियाँ जल की प्रमुख वितरण नली से जोड़ी गयी है। 2 *cm* व्यास की नली में जल प्रवाह का वेग [MNR 1980]

(a) दूसरी नली के तुलना में 4 गुना होगा (b) दूसरी नली की तुलना में $\frac{1}{4}$ गुना होगा

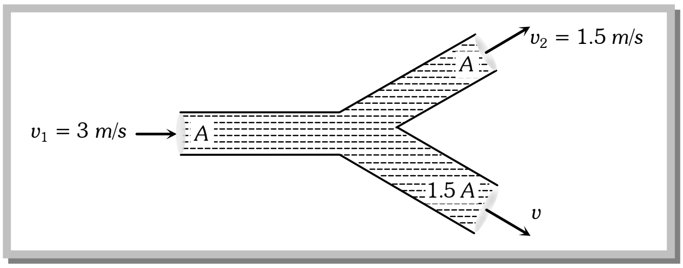
(c) दूसरी नली के तुलना में 2 गुना होगा (d) दूसरी नली के तुलना में $\frac{1}{2}$ गुना होगा

Solution : (a) $d_A = 2 cm$ और $d_B = 4\ cm$ $\therefore$ $r_A = 1\ cm$ व $r_B = 2\ cm$

सांतत्य समीकरण से av = नियतांक

$$\therefore \frac{v_A}{v_B} = \frac{a_B}{a_A} = \frac{\pi(r_B)^2}{\pi(r_A)^2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \Rightarrow v_A = 4v_B$$

<u>Problem</u> 32. एक असम्पीड्य द्रव, चित्रानुसार क्षैतिज नली से बह रहा है। द्रव का वेग v होगा



(a) 3.0 m/s (b) 1.5 m/s (c) 1.0 m/s (d) 2.25 m/s

Solution : (c) यदि द्रव असम्पीड्य है तो प्रति सैकण्ड नली में प्रवेश करने वाले व बाहर निकलने वाले द्रव का द्रव्यमान समान होगा।

$\therefore M = m_1 + m_2 \Rightarrow Av_1 = Av_2 + 1.5A.v \Rightarrow A \times 3 = A \times 1.5 + 1.5A.v \Rightarrow v = 1\ m/s$

<u>Problem</u> 33. किसी बेलनाकार नली AB के सिरे A पर जल v_1 वेग से प्रवेश करता है व सिरे B पर v_2 वेग से बाहर निकलता है। नली सदैव जल से पूर्णतः भरी रहती है। स्थिति I में नली क्षैतिज व स्थिति II में ऊर्ध्वाधर (A ऊपर) व स्थिति III में ऊर्ध्वाधर (B ऊपर) रहती है। तो हमें $v_1 = v_2$ प्राप्त होगा

(a) स्थिति I में (b) स्थिति II में (c) स्थिति III में (d) प्रत्येक स्थिति में

Solution : (d) सांतत्य समीकरण से, चूँकि सांतत्य समीकरण द्रव्यमान संरक्षण नियम पर आधारित है अतः प्रत्येक स्थिति में $v_1 = v_2$ चाहे नली क्षैतिज हो या ऊर्ध्वाधर।

<u>Problem</u> 34. किसी नली से जल 5.18 ms^{-1} वेग से बह रहा है। नली का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल 4.20 cm^2 है। जल धीरे–धीरे 9.66 m नीचे आता है जहाँ नली का क्षेत्रफल 7.60 cm^2 हो जाता है अतः निम्न बिन्दु पर प्रवाह का वेग होगा

(a) 3.0 ms^{-1} (b) 5.7 ms^{-1} (c) 3.82 ms^{-1} (d) 2.86 ms^{-1}

Solution : (d) $a_1 v_1 = a_2 v_2 \Rightarrow 4.20 \times 5.18 = 7.60 \times v_2 \Rightarrow v_2 = 2.86\ m/s$

बहते तरल की ऊर्जा

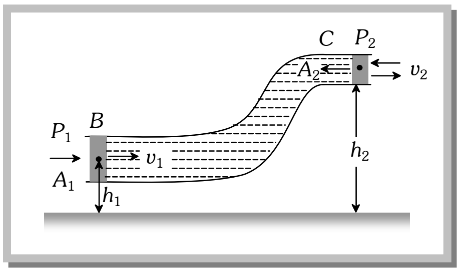
किसी बहते हुए तरल में निम्न तीन प्रकार की ऊर्जाएँ होती हैं।

दाब ऊर्जा	स्थितिज ऊर्जा	गतिज ऊर्जा
किसी द्रव में दाब के कारण निहित ऊर्जा उसकी दाब ऊर्जा कहलाती है। इसकी माप द्रव को दाब के विरुद्ध (वेग परिवर्तन किये बिना) धकेलने में किये गये कार्य से होती है	किसी द्रव में पृथ्वी सतह (किसी निर्देश स्तर) से ऊँचाई या स्थिति के कारण निहित ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा कहलाती है।	किसी द्रव में उसकी गति या वेग के कारण निहित ऊर्जा उसकी गतिज ऊर्जा कहलाती है।
द्रव की दाब ऊर्जा = PV	द्रव की स्थितिज ऊर्जा = mgh	द्रव की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

प्रति एकांक द्रव्यमान दाब ऊर्जा $= \frac{P}{\rho}$	प्रति एकांक द्रव्यमान स्थितिज ऊर्जा $= gh$	प्रति एकांक द्रव्यामान गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}\upsilon^2$
प्रति एकांक आयतन दाब ऊर्जा $= P$	प्रति एकांक आयतन स्थितिज ऊर्जा $= \rho gh$	प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$

बरनौली प्रमेय

इस प्रमेय के अनुसार, जब कोई असम्पीड्य या अश्यान तरल एक स्थान से दूसरे स्थान तक धारा रेखीय प्रवाह में प्रवाहित होता है (मार्ग में कोई स्त्रोत या सिंक न हो) तो मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर इसके एकांक आयतन (या द्रव्यमान) की कुल ऊर्जा अर्थात दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग नियत रहता है।



गणितीय रूप में, प्रति एकांक आयतन द्रव प्रवाह के लिए

$$P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \text{नियतांक}$$

इसे सिद्ध करने के लिए माना कोई द्रव चित्रानुसार असमान परिच्छेद की नली से धारा रेखीय प्रवाहित हो रहा है। नली के सिरों पर दाब क्रमशः P_1 व P_2 है। असम्पीड्य द्रव के V आयतन को नली के बिन्दु B से बिन्दु C तक प्रवाहित कराने में किया गया कार्य

$$W = P_1V - P_2V = (P_1 - P_2)V \qquad ......(i)$$

यह कार्य तरल में निम्न दो परिवर्तन करता है।

(i) द्रव्यमान m (आयतन V) की स्थितिज ऊर्जा mgh_1 से mgh_2 करता है।

अर्थात्, $$\Delta U = mg(h_2 - h_1) \qquad ......(ii)$$

(ii) द्रव्यमान m (आयतन V) की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}m\upsilon_1^2$ से $\frac{1}{2}m\upsilon_2^2$, करता है अर्थात् $\Delta K = \frac{1}{2}m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$ ......(iii)

चूँकि तरल अश्यान है अतः यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$W = \Delta U + \Delta K$$

अर्थात् $$(P_1 - P_2)V = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

या $$P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \qquad [\quad \rho = m/V]$$

या $$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

या $$P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \text{नियतांक}$$

यह समीकरण बरनौली समीकरण कहलाता है तथा बहते हुए द्रव की यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण को प्रदर्शित करती है।

(i) एकांक द्रव्यमान के लिए बरनौली प्रमेय निम्नानुसार लिखी जाती है :

$$\frac{P}{\rho} + gh + \frac{1}{2}\upsilon^2 = \text{नियतांक}$$

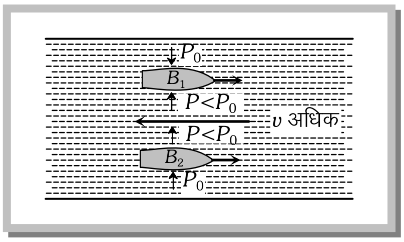
(ii) उपरोक्त समीकरण को g से विभाजित करने पर $\frac{P}{\rho g}+h+\frac{v^2}{2g}=$ नियतांक

जहाँ $\frac{P}{\rho g}$ दाब शीर्ष, h गुरुत्व शीर्ष व $\frac{v^2}{2g}$ वेग शीर्ष कहलाते हैं। इस प्रकार बरनौली प्रमेय निम्न प्रकार भी लिखी जा सकती है।

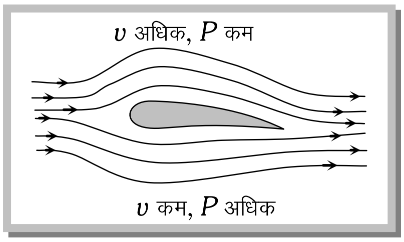
किसी आदर्श द्रव के धारारेखीय प्रवाह में दाब शीर्ष, गुरूत्व शीर्ष व वेग शीर्ष का योग प्रत्येक अनुप्रस्थ काट पर नियत रहता है।

बरनौली प्रमेय के अनुप्रयोग

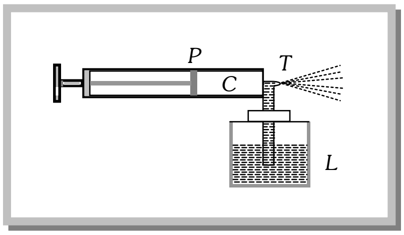
(i) समान दिशा में अत्यन्त समीप गतिशील नावों (या बसों) में आकर्षण : जब दो नाव (या बस) समान दिशा में अत्यंत समीप तेजी से गतिशील हो जाती हैं तो उनके मध्य जल (या वायु) की पर्तें तेजी से गतिशील हो जाती हैं जबकि दूर स्थित जल (या वायु) की पर्तें धीमी गति से चलती हैं। अतः बरनौली प्रमेय से, उनके मध्य दाब कम हो जाता है। इस दाबांतर के कारण ही वे एक दूसरी की खिंचती हैं।



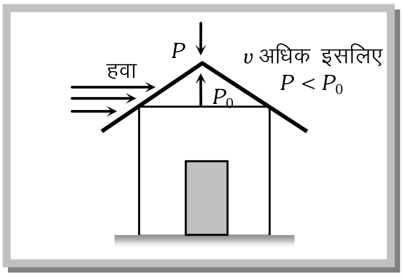
(ii) वायुयान के पंखों की आकृति : वायुयान के पंखों की आकृति चित्रानुसार होती है। जब वायुयान रन वे (Runway) पर तेजी से गतिशील होता है तो पंखों के इस विशिष्ट आकार के कारण पंखों के ऊपर की वायु की गति बढ़ जाती है व नीचे की घट जाती है। अतः बरनौली प्रमेय से ऊपर दाब घट जाता है व नीचे बढ़ जाता है। दाबांतर के कारण वायुयान पर ऊपर की ओर एक बल (Dynamic Lift) लगता है जिसका परिमाण दाबांतर व पंखों के क्षेत्रफल के तुल्य होता है। यदि उपरोक्त बल वायुयान के भार से अधिक हो तो वायुयान ऊपर उठ जाता है।



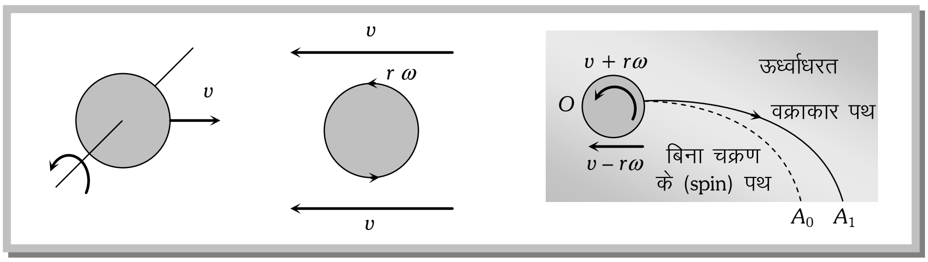
(iii) कणित्र की क्रियाविधि : कारबुरेटर, पेंट–गन या सेंट स्प्रे की क्रिया विधि बरनौली प्रमेय पर आधारित है। इन सभी उपकरणों की सामान्य क्रिया संलग्न चित्र से समझी जा सकती है। संलग्न चित्र में पिस्टन P किसी बेलनाकार नली C में दबाये जाने पर वहाँ उपस्थित वायु को तेज गति से ऊर्ध्वाधर द्रव में डूबी नली L पर से गुजरता है। उच्च गति के कारण वायु की गतिज ऊर्जा बढ़ती है परिणामस्वरूप दाब घटता है व द्रव नली T में ऊपर चढ़कर वायु के साथ फुहार के रूप में फैल जाता है।



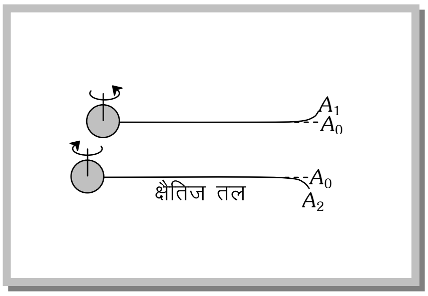
(iv) तेज आँधी में टिन की छतों का उड़ जाना : तेज आँधी के समय जब वायु तेज गति से टिन की छत के ऊपर से गुजरती है तो (बरनौली प्रमेय से) वहाँ कम दाब उत्पन्न हो जाता जबकि छत के नीचे (कमरे में) अधिक दाब होता है इस दाबान्तर के कारण छत ऊपर उठ जाती है और तेज हवा साथ उड़ जाती है।



(v) मैग्नस प्रभाव : जब चक्रण (spin) करती किसी गेंद को फेंका जाता है। तो वह अपने मार्ग से विचलित होती है। यह प्रभाव मैग्नस प्रभाव कहलता है। टेनिस, क्रिकेट इत्यादि खेलों में मैग्नस प्रभाव अत्यन्त उपयोगी है क्योंकि गतिशील गेंद को उचित चक्रण कराकर किसी वांछित वक्र मार्ग पर फेंका जा सकता है। यदि एक गेंद दांयी से बांयी ओर गति कर रही हो तथा साथ ही किसी क्षैतिज अक्ष (गति के लम्बवत्) पर चक्रण कर रही हो तो चित्रानुसार वायु गेंद के सापेक्ष बांयी से दांयी ओर गति करेगी। परिणामस्वरूप गेंद के ऊपर वायु का वेग $(V+r\omega)$ व नीचे $(V-r\omega)$ हो जाएगा अतः बरनौली की प्रमेय से, गेंद के ऊपर दाब कम व नीचे अधिक हो जाएगा अतः गेंद अपने स्वाथिक पथ OA_0 से विचलित होकर मार्ग OA_1 का अनुसरण करेगी तथा चक्रण की दिशा उलटने पर वक्राकार मार्ग के पिच कम हो जाएगी।

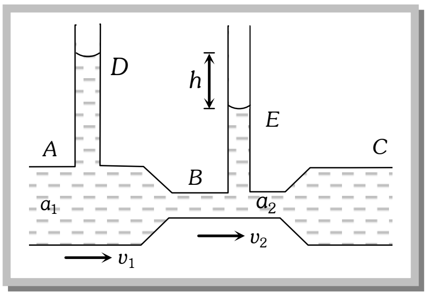


इसी प्रकार यदि गेंद ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः चक्रण करती हुई फैंकी जाए तो वह चित्रानुसार पार्श्विक वक्र मार्ग पर मुड़ेगी जिसे गेंद का स्विंग (swing) करना कहते हैं।



(vi) **वेन्चुरीमीटर** : यह बरनौली प्रमेय पर आधारित उपकरण है। इसकी सहायता से किसी नली में द्रव प्रवाह की दर ज्ञात की जा सकती है।

इसमें दो एक समान समअक्षीय नलियाँ A व C तीसरी समअक्षीय नली B की सहायता से जुड़ी रहती हैं व नली A व B पर दो ऊर्ध्वाधर नलियाँ D व E लगी रहती हैं जो प्रवाहित द्रव के दाब को मापती हैं।



जब नली ABC से द्रव प्रवाहित होता है तो भाग B में प्रवाह वेग A व C की अपेक्षा अधिक होता है। A व B के मध्य दाबांतर नापकर नली में प्रवाह की दर ज्ञात की जाती है।

माना a_1, a_2 = नलियों A व B के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल

v_1, v_2 = A व B में प्रवाह वेग

P_1, P_2 = A व B पर दाब

$\therefore \quad P_1 - P_2 = h\rho g$ ......(i) [ρ = प्रवाहित द्रव का घनत्व]

क्षैतिज प्रवाह के लिये बरनौली प्रमेय से,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \quad \text{......(ii)}$$

समीकरण (i) व (ii) से

$$h\rho g = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho\left[\frac{V^2}{a_2^2} - \frac{V^2}{a_1^2}\right] \quad [\ V = a_1 v_1 = a_2 v_2\ ]$$

$$\therefore \quad V^2 = \frac{2a_1^2 a_2^2 hg}{a_1^2 - a_2^2} \text{ या } V = a_1 a_2\sqrt{\frac{2hg}{a_1^2 - a_2^2}}$$

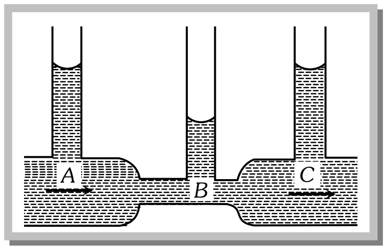
Problem 35. किसी क्षैतिज नली में केरोसिन तेल का प्रवाह वेग 5 m/s है। यदि $g = 10 m/s^2$ तो तेल का वेग शीर्ष होगा

(a) 1.25 m (b) 12.5 m

(c) 0.125 m (d) 125 m

Solution : (a) वेग शीर्ष $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(5)^2}{2 \times 10} = 1.25\, m$

Problem 36. संलग्न चित्र में, क्षैतिज नली में द्रव प्रवाहित हो रहा है। नली के खण्ड *A*, *B* और *C* की त्रिज्याएँ क्रमशः 2 *cm*, 1 *cm* व 2 *cm* है। यह कहा जा सकता है कि



(a) नली *A* में द्रव स्तम्भ की ऊँचाई अधिकतम होगी

(b) नली *A* व *B* में द्रव स्तम्भ की ऊँचाई समान होगी

(c) सभी नलियों में द्रव स्तम्भों की ऊँचाई समान होगी

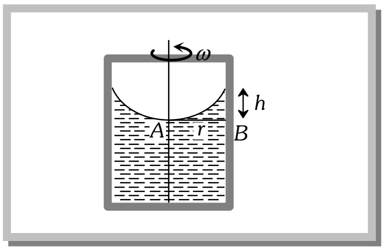
(d) नलियों *A* व *C* में द्रव स्तम्भों की ऊँचाई समान होगी

Solution : (d) चूँकि क्षैतिज नलियों *A* व *C* के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल समान है अतः सांतत्य समीकरण से $v_A = v_C$ अतः बरनौली प्रमेय से $P_A = P_C$ अर्थात् नलियों *A* व *C* में द्रव स्तम्भों की ऊँचाई समान होगी।

Problem 37. किसी बेलनाकार पात्र में द्रव रखा है पात्र आधार के केन्द्र से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः घुमाया जा रहा है । पात्र की त्रिज्या r व कोणीय वेग ω है तब पात्र के केन्द्र व किनारों पर द्रव की ऊँचाई में अंतर होगा

(a) $\frac{r\omega}{2g}$ (b) $\frac{r^2\omega^2}{2g}$ (c) $\sqrt{2gr\omega}$ (d) $\frac{\omega^2}{2gr^2}$

Solution : (b) बरनौली प्रमेय से, $P_A + \frac{1}{2}dv_A^2 + dgh_A = P_B + \frac{1}{2}dv_B^2 + dgh_B$



यहाँ, $h_A = h_B$ $\therefore P_A + \frac{1}{2}dv_A^2 = P_B + \frac{1}{2}dv_B^2 \Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{2}d[v_B^2 - v_A^2]$

अब, $v_A = 0, v_B = r\omega$ तथा $P_A - P_B = hdg$

$\therefore hdg = \frac{1}{2}dr^2\omega^2$ या $h = \frac{r^2\omega^2}{2g}$

Problem 38. बंद नल से संलग्न दाबमापी $3.5 \times 10^5\ N/m^2$ पाठ देती है। जब नल को खोला जाता है तो दाबमापी का पाठ गिरकर $3.0 \times 10^5\ N/m^2$ हो जाता है तो जल का प्रवाह वेग होगा

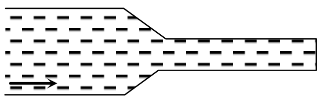
(a) 100 *m/s* (b) 10 *m/s* (c) 1 *m/s* (d) $10\sqrt{10}\ m/s$

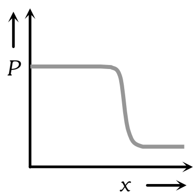
Solution : (b) एकांक द्रव्यमान के लिए बरनॉली प्रमेय से, $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2$ = नियतांक

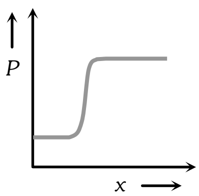
जब द्रव बहना प्रारम्भ करता है उसकी दाब ऊर्जा घटती है व $\frac{1}{2}v^2 = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$

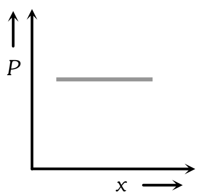
$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{3.5\times10^5 - 3\times10^5}{10^3} \Rightarrow v^2 = \frac{2\times0.5\times10^5}{10^3} \Rightarrow v^2 = 100 \Rightarrow v = 10\ m/s$$

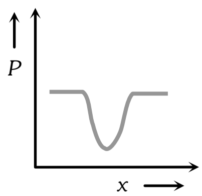
Problem 39. असमान परिच्छेद की किसी घर्षणरहित नली से जल प्रवाहित हो रहा है (चित्र देखें) अक्ष के अनुदिश धनात्मक X-अक्ष की ओर दाब किस ग्राफ द्वारा प्रदर्शित होगा



(a)


(b)


(c)


(d)


Solution : (a) जब नली का अनुप्रस्थ काट घटेगा तो वेग बढ़ेगा तथा बरनौली प्रमेय से दाब घटेगा।

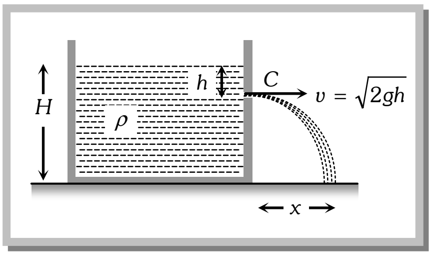
Problem 40. वायुयान के पंख के ऊपर व नीचे से वायु क्रमशः 120 m/s व 90 m/s के क्षैतिज वेग से बह रही है। वायु का घनत्व 1.3 $kg/metre^3$ है पंख की लम्बाई 10 m व औसत चौड़ाई 2 m है। पंख के दोनों ओर दाबांतर होगा

(a) 4095.0 *Pascal* (b) 409.50 *Pascal* (c) 40.950 *Pascal* (d) 4.0950 *Pascal*

Solution : (a) बरनौली प्रमेय से $P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 1.3 \times [(120)^2 - (90)^2] = 4095\, N/m^2$ या *Pascal*

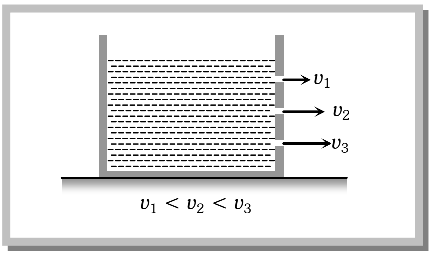
द्रव का बहिःस्त्राव वेग

यदि किसी पात्र में H ऊँचाई तक द्रव भरा जाए व द्रव की मुक्त सतह से h गहराई पर एक छिद्र किया जाए व छिद्र के स्तर को निर्देश स्तर (स्थितिज ऊर्जा शून्य) माना जाए तो छिद्र के बाहर व अंदर बरनौली प्रमेय से



$\therefore \quad (P_0 + h\rho g) + 0 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$ या $v = \sqrt{2gh}$

जो कि किसी पिण्ड के विराम से h दूरी नीचे गिरने पर प्राप्त वेग के तुल्य है तथा द्रव का बहिःस्त्राव वेग कहलाता है। यह परिणाम सर्वप्रथम टॉरिसेली ने दिया था अतः टरसेली प्रमेय कहलाता है।



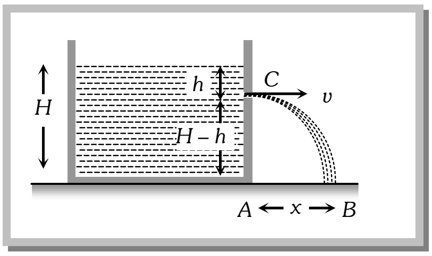
(i) बहिःस्त्राव वेग द्रव की प्रकृति, पात्र में द्रव की मात्रा व छिद्र के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता।

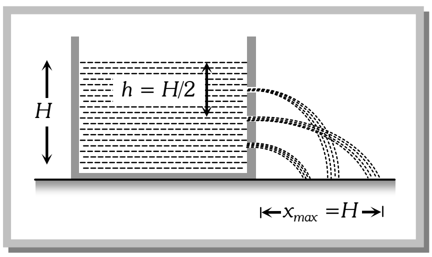
(ii) छिद्र की द्रव की मुक्त सतह से दूरी अधिक होने पर बहिःस्त्राव वेग भी अधिक होगा।

[अर्थात् $v \propto \sqrt{h}$]

(iii) छिद्र पर द्रव के प्रवाह वेग का ऊर्ध्वाधर घटक शून्य है व छिद्र की तली से ऊँचाई $(H - h)$ है। अतः जल के छिद्र से तली तक पहुँचने में लगा समय $t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$

(iv) द्रव समय t तक नियत क्षैतिज वेग v से बहता है अतः क्षैतिज परास x का मान

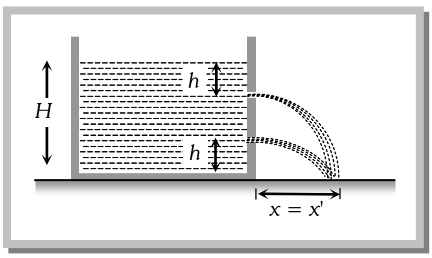




$x = vt = \sqrt{2gh} \times \sqrt{[2(H-h)/g]} = 2\sqrt{h(H-h)}$

अधिकतम परास के लिए $\frac{dx}{dh} = 0$

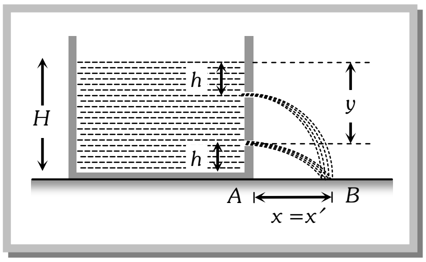
$\therefore \quad h = \frac{H}{2}$



अतः अधिकतम परास $x_{max} = 2\sqrt{\frac{H}{2}\left[H - \frac{H}{2}\right]} = H$

(v) यदि द्रव की मुक्त सतह पात्र के तली से H ऊँचाई पर हो व मुक्त सतह से गहराई h व y पर पात्र की दीवार पर दो छिद्र हों तो

$x = 2\sqrt{h(H-h)}$ व $x' = 2\sqrt{y(H-y)}$



यदि $x = x'$ हो तो अर्थात् $h(H-h) = y(H-y)$

$$\Rightarrow \quad y^2 - Hy + h(H-h) = 0$$

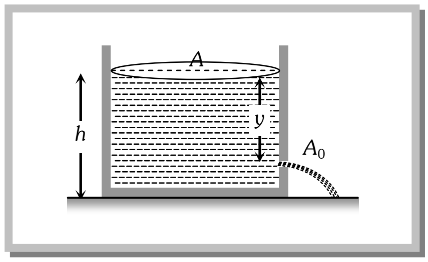
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}[H \pm (H-2h)], \Rightarrow \ y = h \text{ या } (H-h)$$

अर्थात् छिद्र द्रव की मुक्त सतह से h $(H-h)$ गहराई पर हो तो परास समान होगी। चूँकि मुक्त सतह से $(H-h)$ गहराई का अर्थ है तली से h ऊँचाई अतः छिद्र मुक्त सतह से h गहराई व तली से h ऊँचाई पर होने पर परास समान होती है।

(vi) यदि छिद्र का क्षेत्रफल A_0 हो व छिद्र द्रव की मुक्त सतह से y गहराई नीचे है तथा पात्र के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A हो तो छिद्र से प्रति सैकण्ड निकलने वाला आयतन $(dV/dt) = vA_0 = A_0\sqrt{2gy}$ $\quad [\ v = \sqrt{2gy}\ ]$

इस कारण पात्र में द्रव स्तर गिरेगा यदि समय t से $t + dt$ में छिद्र के ऊपर जल स्तर y से $y - dy$ हो जाए तो $-dV = A\,dy$

समी (i) में dV का मान रखने पर



$$-A\frac{dy}{dt} = A_0\sqrt{2gy} \text{ अर्थात् } \int dt = -\frac{A}{A_0}\frac{1}{\sqrt{2g}}\int y^{-1/2}dy$$

अतः स्तर H से गिरकर H' होने में लगा समय

$$t = -\frac{A}{A_0}\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_H^{H'} y^{-1/2}dy = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{2}{g}}[\sqrt{H} - \sqrt{H'}]$$

यदि छिद्र पात्र के तली पर हो तो पात्र खाली होने में लगा समय

$$t = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad [\ H' = 0\ ]$$

Problem 41. एक बड़ा पात्र 'h' ऊँचाई तक जल से भरा है उसे पेंदे में छेद करके खाली करने पर जल स्तर h से $\frac{h}{2}$ व $\frac{h}{2}$ से 0 होने में लगे समयों का अनुपात होगा [EAMCET (Engg.) 2003]

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{2} - 1$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

Solution : (c) द्रव स्तर H से H' गिरने में लगा समय $t = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{H} - \sqrt{H'}\right]$

प्रश्नानुसार, स्तर h से $\frac{h}{2}$ होने में लगा समय $t_1 = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{h} - \sqrt{\frac{h}{2}}\right]$

तथा स्तर $\frac{h}{2}$ से 0 होने में लगा समय $t_2 = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{\frac{h}{2}} - 0\right]$; $\therefore \frac{t_1}{t_2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}-0} = \sqrt{2}-1.$

Problem 42. 20 मीटर ऊँचा बेलनाकार पात्र पूर्णतः जल से भरा है। पात्र के तली के एकदम समीप दीवार में छिद्र से निकलने वाले द्रव का बहिःस्त्राव वेग (*m/s*) होगा [AIEEE 2002]

(a) 10 (b) 20 (c) 25.5 (d) 5

Solution : (b) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times20} = 20\, m/s$

Problem 43. जल से भरे पात्र के तली में एक छिद्र है। तली पर कुल दाब 3 *atm* (1 *atm* = $10^5 N/m^2$) है तब छिद्र से निकलने वाले जल का वेग होगा [CPMT 2002]

(a) $\sqrt{400}\, m/s$ (b) $\sqrt{600}\, m/s$ (c) $\sqrt{60}\, m/s$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (b) पात्र की तली पर दाब $P = h\rho g = 3\times10^5 \frac{N}{m^2}$ व वेग $v = \sqrt{2gh}$

$\therefore v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\times3\times10^5}{10^3}} = \sqrt{600}\, m/s$

Problem 44. किसी बड़े खुले पात्र की दीवार पर दो छिद्र हैं। एक छिद्र वर्गाकार (भुजा *L*) द्रव की मुक्त सतह से *y* गहराई पर तथा दूसरा वृत्ताकार (त्रिज्या *R*) द्रव की मुक्त सतह से 4*y* गहराई पर है। यदि छिद्रों से प्रति सैकण्ड समान मात्रा में जल स्त्रावित हो तो *R* का मान होगा [IIT-JEE (Screening) 2000]

(a) $2\pi L$ (b) $\frac{L}{\sqrt{2\pi}}$ (c) L (d) $\frac{L}{2\pi}$

Solution : (b) *h* गहराई पर छिद्र से बहिःस्त्राव वेग $v = \sqrt{2gh}$

वर्गाकार छिद्र से जल प्रवाह की दर $Q_1 = a_1 v_1 = L^2\sqrt{2gy}$

वृत्ताकार छिद्र से जल प्रवाह की दर $Q_2 = a_2 v_2 = \pi R^2\sqrt{2g(4y)}$

प्रश्नानुसार $Q_1 = Q_2 \Rightarrow L^2\sqrt{2gy} = \pi R^2\sqrt{2g(4y)} \Rightarrow R = \frac{L}{\sqrt{2\pi}}$

Problem 45. बेलनाकार पात्र के तली में *A* त्रिज्या का छिद्र है। पात्र में जल *h* ऊँचाई तक भरा जाए तो पात्र *t* सेंकड में खाली हो जाता है। यदि जल 4*h* ऊँचाई तक भर दिया जाए तो पात्र खाली होने में लगा समय होगा [MP PMT 1997]

(a) *t* (b) 4*t* (c) 2 *t* (d) *t*/4

Solution : (c) पात्र खाली होने में लगा समय $t = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} = \sqrt{\frac{4h}{h}} = 2 \quad \therefore t_2 = 2t$

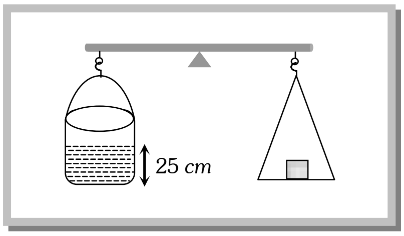
Problem 46. एक बेलनाकार पात्र में 25 *cm* ऊँचाई तक जल भरा है। इसके तली में $\frac{1}{4} cm^2$ क्षेत्रफल का छेद है । पात्र किसी भौतिक तुला पर संतुलित है जब जल बहने लगे तो संतुलन भार में प्रारम्भिक परिवर्तन होगा

(a) 12.5 *gm*-भार वृद्धि

(b) 6.25 *gm*-भार वृद्धि

(c) 12.5 *gm*-भार कमी

(d) 6.25 *gm*-भार कमी



Solution : (c) माना A = छेद का क्षेत्रफल, v = प्रारम्भिक बहिःस्त्राव वेग, d = जल का घनत्व,

प्रति सैकण्ड प्रवाहित जल का प्रारम्भिक आयतन = Av

प्रति सैकण्ड प्रवाहित जल का प्रारम्भिक द्रव्यमान = Avd

संवेग में परिवर्तन की दर = Adv^2

$\therefore$ पात्र से बाहर प्रवाहित जल का प्रारम्भिक ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर लगने वाला बल = Adv^2

अतः समान परिमाण का प्रतिक्रिया बल ऊपर की ओर लगेगा।

अतः पात्र पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर प्रारम्भिक बल = Adv^2 $[\;v = \sqrt{2gh}\;]$

$\therefore$ भार में प्रारम्भिक कमी $= Ad(2gh) = 2Adgh = 2\times\left(\frac{1}{4}\right)\times 1\times 980\times 25 = 12.5$ *gm*-भार

Problem 47. किसी बेलनाकार पात्र के तली में 1 cm^2 क्षेत्रफल का छेद है। पात्र में किसी नली की सहायता से 70 cm^3/sec की दर से पानी भरा जा रहा है। वह अधिकतम ऊँचाई जहाँ तक पात्र में पानी भरा जा सकता है, होगी

(a) 2.5 *cm* (b) 5 *cm* (c) 10 *cm* (d) 0.25 *cm*

Solution : (a) पात्र में जल ऊँचाई तब अधिकतम होगी जब पात्र में प्रति सैकण्ड प्रवेश करने वाले जल की मात्रा, प्रति सैकण्ड बाहर निकलने वाले जल की मात्रा के तुल्य होगी

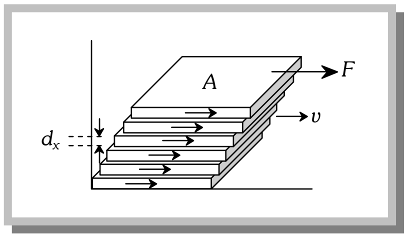
पात्र से प्रति सैकण्ड बाहर निकलने वाले जल का आयतन $= Av = A\sqrt{2gh}$

पात्र में प्रति सैकण्ड प्रवेश करने वाले जल का आयतन $= 70\,cm^3/sec$

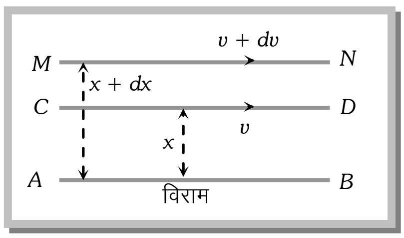
$$\therefore\; A\sqrt{2gh} = 70 \Rightarrow 1\times\sqrt{2gh} = 70 \Rightarrow 1\times\sqrt{2\times 980\times h} = 70 \;\;\therefore\; h = \frac{4900}{1960} = 2.5\,cm$$

श्यानता व श्यान बल संबंधित न्यूटन का नियम

किसी तरल के धारारेखीय प्रवाह में द्रव की एक सतह किसी दूसरी सम्पर्क सतह पर फिसलती है या फिसलने का प्रयास करती है तो उनके मध्य का स्पर्शरेखीय बल कार्य करने लगता है जो उसकी सापेक्षिक गति का विरोध करता है। तरल का वह गुण जिसके कारण वह अपनी सम्पर्क सतहों के मध्य सापेक्षिक गति का विरोध करता है श्यानता (तरल घर्षण या आंतरिक घर्षण) कहलाता है तथा सम्पर्क सतहों के मध्य लगने वाला बल श्यान बल कहलाता है।



माना AB (चित्रानुसार) द्रव की स्थिर सतह है इससे x व $x + dx$ दूरी पर दो अन्य सतहें क्रमशः CD व MN हैं जिनके वेग क्रमशः v व $v + dv$ हैं तब $\frac{dv}{dx}$ दूरी के साथ वेग में परिवर्तन अर्थात वेग प्रवणता है।



न्यूटन के अनुसार, पर्तों के मध्य लगने वाला श्यान बल सतहों के सम्पर्क क्षेत्रफल व उनके मध्य वेग प्रवणता पर निर्भर करता है। अर्थात्

$F \propto A$ और $F \propto \frac{dv}{dx}$ $\therefore$ $F \propto A\frac{dv}{dx}$

या $F = -\eta A\frac{dv}{dx}$

जहाँ η नियतांक है जिसे श्यानता गुणांक कहते हैं। ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि श्यान बल तरल प्रवाह की दिशा के विपरीत दिशा में लगता है।

यदि $A = 1, \frac{dv}{dx} = 1$ व $\eta = F$ हो तो

अतः श्यानता गुणांक का मान एकांक सम्पर्क क्षेत्रफल व एकांक वेग प्रवणता की दो पर्तो के मध्य लगने वाले श्यान बल के तुल्य होता है।

(1) इकाई : dyne-s-cm^{-2} या पॉइज (C.G.S.); *Newton-s-m^{-2}* या पॉइजुली या डेका पॉइजुली (S.I. system)

1 पॉइजुली = 1 डेका पॉइजुले = 10 पॉइज

(2) विमीय सूत्र : $[ML^{-1}T^{-1}]$

(3) द्रवों की श्यानता, गैसों की श्यानता की तुलना में अत्यधिक (लगभग 100 गुनी) होती है। अर्थात् $\eta_L > \eta_G$

उदाहरण: जल की श्यानता = 0.01 पॉइज जबकि वायु की श्यानता = 200 μ पॉइज

(4) दाब बढ़ाने पर, द्रवों (जल का छोड़कर) की श्यानता बढ़ती है। गैसों की श्यानता (व्यवहारिक रूप से) दाब पर निर्भर नहीं करती। जल की श्यानता दाब बढ़ाने पर घटती है।

(5) **श्यानता व ठोस घर्षण में अंतर** : श्यान बल पर्तों के सम्पर्क क्षेत्रफल, आपेक्षिक वेग व उनके मध्य दूरी पर निर्भर करता है जबकि घर्षण बल सम्पर्क सतहों के क्षेत्रफल व आपेक्षिक वेग व उनके मध्य दूरी पर निर्भर नहीं करता है।

(6) अणुगति सिद्धान्त के आधार पर श्यानता के कारण संवेग स्थानांतरित होता है जबकि विसरण व चालन के कारण क्रमशः द्रव्यमान व ऊर्जा स्थानांतरित होती है।

(7) गाढ़े द्रवों जैसे शहद, ग्लिसरीन व कोलतार इत्यादि की श्यानता, पतले द्रवों जैसे जल इत्यादि से अधिक होती है।

(8) द्रवों की श्यानता का कारण उसके अणुओं के मध्य ससंजक बल है जबकि गैसों की श्यानता का कारण विसरण है।

(9) ताप बढ़ाने पर गैसों की श्यानता बढ़ती है क्योंकि ताप बढ़ाने पर विसरण की दर बढ़ जाती है।

(10) ताप बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता घट जाती है क्योंकि ताप बढ़ाने पर उनके अणुओं के मध्य ससंजक बल घट जाता है।

श्यानता गुणांक व ताप में संबंध का एनड्रेड (Andrade) सूत्र $\eta = \frac{Ae^{C\rho/T}}{\rho^{-1/3}}$

जहाँ T= द्रव का परम ताप, ρ = द्रव का घनत्व, A व C नियतांक हैं।

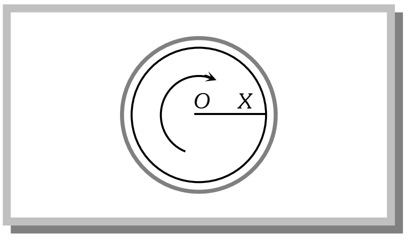
Problem 48. एक वर्गाकार चकती (प्रत्येक भुजा 0.1 *m*) किसी दूसरी समांतर चकती पर 0.1 *m/s* वेग से फिसल सकती है। दोनों प्लेटों को जल में डुबोया जाता है। यदि श्यानता गुणांक 0.01 *पॉइज* व श्यान बल 0.002 *N* हो तो प्लेटों के मध्य दूरी (*m*) है [EAMCET (Med.) 2003]

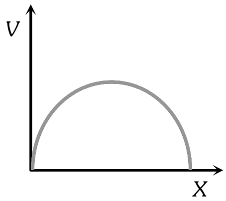
(a) 0.1 (b) 0.05 (c) 0.005 (d) 0.0005

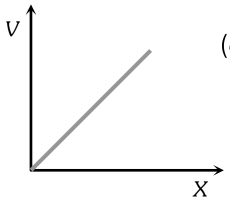
Solution : (d) $A = (0.1)^2 = 0.01m^2$, $\eta = 0.01\ Poise = 0.001\ decapoise$ (M.K.S. unit), $dv = 0.1\ m/s$ तथा $F = 0.002\ N$

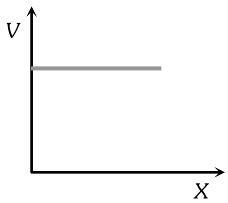
$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad \therefore\ dx = \frac{\eta A dv}{F} = \frac{0.001 \times 0.01 \times 0.1}{0.002} = 0.0005m$$

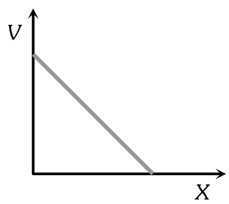
Problem 49. चित्र में, चाय के कप का चित्र ऊपर से लिया गया है। चाय को हिलाकर छोड़ने पर वह धारा रेखीय घूर्णन करती है। किस ग्राफ में बिन्दु *O* से दूरी *X* के साथ द्रव कणों की चाल में परिवर्तन प्रदर्शित है



(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Solution : (d) जब हम केन्द्र से कप की दीवारों की ओर जाते हैं तो द्रव का वेग कम होगा व अंततः शून्य हो जाएगा।

स्टोक का नियम व क्रांतिक वेग

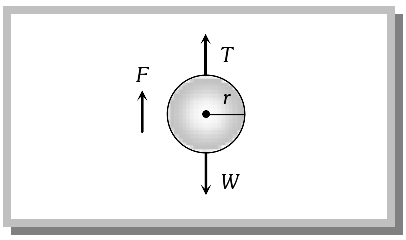
जब कोई पिण्ड किसी तरल में गिरता है तो पिण्ड के सम्पर्क में तरल की पर्तें भी उसके साथ गति करती हैं। इस कारण पिण्ड के समीप तरल की पर्तों में आपेक्षिक गति प्रारम्भ हो जाती है। अतः श्यान बल कार्य करना प्रारम्भ कर देता है। श्यान बल पिण्ड की गति का विरोध करता है। श्यान बल का परिमाण पिण्ड के आकार व आकृति व तरल में इसके वेग पर निर्भर करता है।

स्टोक के अनुसार, यदि r त्रिज्या का गोला, η श्यानता वाले द्रव में v वेग से गिरे तो गोले की गति का विरोध करने वाला श्यान बल $F = 6\pi\eta rv$ होगा।

यह स्टोक का नियम कहलाता है।

यदि एक गोलाकार पिण्ड (त्रिज्या r) किसी श्यान तरल में गिरता है तो पहले तो वह त्वरित होता है परन्तु कुछ समय पश्चात् त्वरण शून्य हो जाता है व पिण्ड नियत वेग, जिसे क्रांतिक वेग कहते हैं, से गिरने लगता है। पिण्ड पर कार्यरत् बल

(i) पिण्ड का भार (W) = mg = (*आयतन* × *घनत्व*) × $g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$



(ii) उत्प्लावक बल (T) = विस्थापित तरल का भार

= तरल के (*आयतन* × *घनत्व*) × $g = \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g$

(iii) श्यान बल (F) = $6\pi\eta rv$

जब पिण्ड क्रांतिक वेग से गिरता है उस पर कार्यरत बलों का योग शून्य होता है $\therefore W - T - F = 0$ या $F = W - T$

$$\Rightarrow 6\pi\eta rv = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \sigma) g$$

$\therefore$ क्रांतिक वेग $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho - \sigma) g}{\eta}$

(iv) क्रांतिक वेग गोले की त्रिज्या पर निर्भर करता है त्रिज्या n गुनी करने पर क्रांतिक वेग n^2 गुना हो जाएगा।

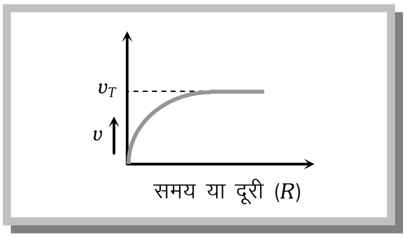
(v) पिण्ड का घनत्व अधिक होने पर क्रांतिक वेग भी अधिक होगा।

(vi) तरल की श्यानता व घनत्व अधिक होने पर क्रांतिक वेग कम होगा।

(vii) यदि $\rho > \sigma$ तो क्रांतिक वेग धनात्मक होगा अतः गोलाकार पिण्ड क्रांतिक वेग से नीचे की ओर गति करेगा।

(viii) यदि $\rho < \sigma$ तो क्रांतिक वेग ऋणात्मक होगा व गोलाकार पिण्ड क्रांतिग वेग से ऊपर की ओर गति करेगा। उदाहरण : जल में वायु का बुलबुला।

(ix) क्रांतिक वेग ग्राफ :



Problem 50. 'r' त्रिज्या की गोलाकार गेंद, 'η' श्यानता वाले द्रव में 'v' वेग से गिर रही है। गेंद पर कार्यरत मंदक श्यान बल [AIEEE 2004]

(a) त्रिज्या 'r' के व्युत्क्रमानुपाती व वेग 'v' के समानुपाती होगा

(b) त्रिज्या 'r' व वेग 'v' दोनों के समानुपाती होगा

(c) त्रिज्या 'r' व वेग 'v' दोनों के व्युत्क्रमानुपाती होता है

(d) त्रिज्या 'r' के समानुपाती व वेग 'v' के व्युत्क्रमानुपाती होता है

Solution : (b) $F = 6\pi\eta rv$

Problem 51. m द्रव्यमान का छोटा गोला अत्यधिक ऊँचाई से गिराया जाता है 10 m गिरने के पश्चात् यह क्रांतिक वेग प्राप्त कर लेता है व फिर इसी वेग से गिरता है। वायु के घर्षण द्वारा पिण्ड के प्रारम्भिक 100 m गिरने में किया गया कार्य होगा [MP PMT 1990]

(a) वायु घर्षण द्वारा पिण्ड के अगले 100 m गिरने के विरुद्ध किये कार्य से अधिक

(b) वायु घर्षण द्वारा पिण्ड के अगले 100 मी. गिरने के विरुद्ध किये कार्य से कम

(c) 100 mg के तुल्य

(d) 100 mg से अधिक

Solution : (b) प्रारम्भिक 100 m गिरने में गोला विराम से प्रारम्भ करके अधिकतम वेग (क्रांतिक वेग) प्राप्त करता है अतः प्रारम्भ में वायु का घर्षण अर्थात् श्यान बल (जो कि वेग के समानुपाती होता है) कम होता है व $v = v_T$ अधिकतम होता है।

अतः प्रारम्भिक 100 m में वायु घर्षण के विरूद्ध किया गया कार्य अगले 100 m किये गये कार्य से कम होता है।

Problem 52. समान त्रिज्या की दो बूँदें वायु में गिर रही हैं। उनके क्रांतिक वेग 5 cm/sec हैं यदि बूँदे संयुक्त हो जाएं तो क्रांतिक वेग होगा [MP PMT 1990]

(a) 10 cm/sec (b) 2.5 cm/sec (c) $5 \times (4)^{1/3}\ cm/sec$ (d) $5 \times \sqrt{2}\ cm/sec$

Solution : (c) यदि r त्रिज्या की दो बूँदे मिलकर R त्रिज्या की एक बूँद बनायें तो $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$

$\Rightarrow R^3 = 2r^3 \Rightarrow R = 2^{1/3} r$

यदि r त्रिज्या की बूँद श्यान माध्यम में गिरें तो उसके द्वारा प्राप्त क्रांतिक वेग $v \propto r^2$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{2^{1/3}r}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow v_2 = 2^{2/3} \times v_1 = 2^{2/3} \times (5) = 5 \times (4)^{1/3} cm/s$$

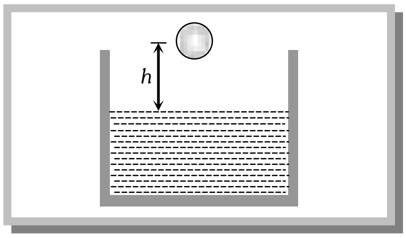
Problem 53. एक गेंद जिसकी त्रिज्या r व घनत्व ρ है गुरुत्व के अधीन मुक्त रूप से गिर रही है। h ऊँचाई से गिरने के पश्चात् वह जल में प्रवेश करती है। जल में प्रवेश करने के पश्चात् उसकी चाल नियत बनी रहती है। जल की श्यानता η, हो तो h का मान होगा

(a) $\frac{2}{9}r^2\left(\frac{1-\rho}{\eta}\right)g$

(b) $\frac{2}{81}r^2\left(\frac{\rho-1}{\eta}\right)g$

(c) $\frac{2}{81}r^4\left(\frac{\rho-1}{\eta}\right)^2 g$

(d) $\frac{2}{9}r^4\left(\frac{\rho-1}{\eta}\right)^2 g$



Solution : (c) जल सतह से टकराते समय गेंद का वेग $v = \sqrt{2gh}$ ....(i)

जल के अंदर गेंद का क्रांतिक वेग $v = \frac{2}{9}r^2 g\frac{(\rho-1)}{\eta}$ ....(ii)

प्रश्नानुसार, समी. (i) व (ii) से $\sqrt{2gh} = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho-1) \Rightarrow h = \frac{2}{81}r^4\left(\frac{\rho-1}{\eta}\right)^2 g$

पॉइजुली सूत्र

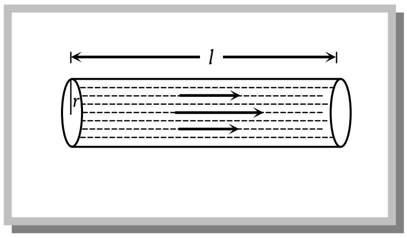
पॉइजुली ने केशनली में प्रवाहित द्रव के धारारेखीय प्रवाह का अध्ययन किया। उन्होंने निष्कर्ष निकाला कि यदि 'l' लम्बाई की केशनली के सिरों पर दाबांतर (P) हो, नली की त्रिज्या r हो तो प्रति सैकण्ड नली से प्रवाहित द्रव का आयतन

(i) दाबांतर (P) के समानुपाती

(ii) नली की त्रिज्या (r) के चतुर्थघात के समानुपाती

(iii) द्रव की श्यानता (η) की व्युत्क्रमानुपाती

(iv) नली की लम्बाई(l) के व्युत्क्रमानुपाती होता है



अर्थात् $V \propto \frac{Pr^4}{\eta l}$ या $V = \frac{KPr^4}{\eta l}$

$\therefore$ $V = \frac{\pi P r^4}{8\eta l}$ [जहाँ $K = \frac{\pi}{8}$ समानुपाती नियतांक है]

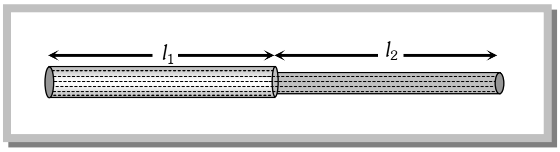
यही पॉइजुली समीकरण है।

यह समीकरण निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है $V = \frac{P}{R}$ जहाँ $R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$

R द्रव प्रतिरोध कहलाता है।

(1) नलियों का श्रेणीक्रम संयोजन

(i) यदि दो नलियाँ जिनकी लम्बाई l_1 व l_2 व त्रिज्याऐं r_1 व r_2 हैं श्रेणी क्रम में जोड़ी जाती हैं व उनके सिरों के मध्य दाबान्तर P है।



तब $P = P_1 + P_2$ ......(i)

जहाँ P_1 व P_2 क्रमशः प्रथम व द्वितीय नलियों के सिरों के मध्य दाबांतर है।

(ii) प्रत्येक नली से प्रवाहित द्रव का आयतन अर्थात द्रव प्रवाह की दर समान होगी।

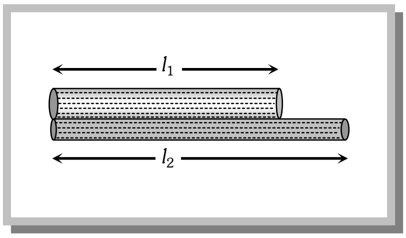
अतः $V = V_1 = V_2$ अर्थात् $V = \frac{\pi P_1 r_1^4}{8\eta l_1} = \frac{\pi P_2 r_2^4}{8\eta l_2}$ .....(ii)

समी (ii) से P_1 व P_2 के मान समीकरण (i) में रखने पर $P = P_1 + P_2 = V\left[\frac{8\eta l_1}{\pi r_1^4} + \frac{8\eta l_2}{\pi r_2^4}\right]$

$\therefore \quad V = \frac{P}{\left[\frac{8\eta l_1}{\pi r_1^4} + \frac{8\eta l_2}{\pi r_2^4}\right]} = \frac{P}{R_1 + R_2} = \frac{P}{R_{eff}}$ जहाँ R_1 व R_2 नलियों में द्रव प्रतिरोध हैं।

(iii) श्रेणी क्रम में प्रभावी द्रव प्रतिरोध $R_{eff} = R_1 + R_2$

(2) नलियों का समांतर संयोजन



(i) $P = P_1 = P_2$

(ii) $V = V_1 + V_2 = \frac{P\pi r_1^4}{8\eta l_1} + \frac{P\pi r_2^4}{8\eta l_2} = P\left[\frac{\pi r_1^4}{8\eta l_1} + \frac{\pi r_2^4}{8\eta l_2}\right]$

$\therefore \; V = P\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] = \frac{P}{R_{eff}}$

(iii) समातंर क्रम में प्रभावी द्रव प्रतिरोध $\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ या $R_{eff} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Problem 54. किसी r त्रिज्या व l लम्बाई की केशनली के सिरों पर दाबान्तर P है व इससे प्रति सैकण्ड प्रवाहित द्रव का आयतन V है। यह नली समान लम्बाई व आधी त्रिज्या की किसी अन्य नली के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ी जाती है। तो प्रति सैकण्ड प्रवाहित द्रव का आयतन होगा [EAMCET (Engg.) 2003]

(a) $\frac{V}{16}$ (b) $\frac{V}{17}$ (c) $\frac{16V}{17}$ (d) $\frac{17V}{16}$

Solution : (b) द्रव प्रवाह की दर $V = \frac{P}{R}$ जहाँ द्रव प्रतिरोध $R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$

द्वितीय नली का द्रव प्रतिरोध $R' = \frac{8\eta l}{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^4} = \frac{8\eta l}{\pi r^4}.16 = 16R$

श्रेणी क्रम के लिए $V = \frac{P}{R + R'} = \frac{P}{R + 16R} = \frac{P}{17R} = \frac{V}{17}$

Problem 55. एक समान क्षैतिज केशनली से एक द्रव प्रवाहित हो रहा है। नली के सिरों पर दाबांतर P है। किस दाब पर नली की त्रिज्या, लम्बाई दुगुनी करने पर, प्रवाह वेग भी दो गुना हो जाएगा [EAMCET 2001]

(a) P (b) $\frac{3P}{4}$ (c) $\frac{P}{2}$ (d) $\frac{P}{4}$

Solution : (d) सूत्र $V = \frac{P\pi r^4}{8\eta l} \Rightarrow P = \frac{V8\eta l}{\pi r^4} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1} \times \frac{l_2}{l_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 = 2 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow P_2 = \frac{P_1}{4} = \frac{P}{4}$

Problem 56. समान त्रिज्या परन्तु l_1 व l_2 लम्बाईयों की दो केशनलियाँ किसी पात्र के तले में समान्तर क्रम में संयोजित हैं। दाब शीर्ष p है। एक एकल नली की लम्बाई क्या हो कि पहले वाली दोनों नलियों के स्थान पर उसे लगाने पर द्रव प्रवाह समान बनी रहे

(a) $l_1 + l_2$ (b) $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}$ (c) $\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ (d) $\frac{1}{l_1 + l_2}$

Solution : (c) समांतर संयोजन हेतु $\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{\pi r^4}{8\eta l} = \frac{\pi r^4}{8\eta l_1} + \frac{\pi r^4}{8\eta l_2} \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \quad \therefore l = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$

Problem 57. हमारे पास दो पतली केशनलियाँ T_1 व T_2 हैं उनकी लम्बाइयाँ l_1 व l_2 हैं तथा त्रिज्याएँ क्रमशः r_1 व r_2 है। नली T_1 से दाबांतर ρ पर द्रव प्रवाह की दर $8 cm^3/sec$ है। यदि $l_1 = 2l_2$ तथा $r_1 = r_2$ हों तो दोनों नलियों को श्रेणी क्रम में जोड़ने पर द्रव प्रवाह की दर क्या होगी जब उनके सिरों पर दाबांतर पूर्ववत् (P) रहे

(a) $4\ cm^3/sec$ (b) $(16/3)\ cm^3/sec$ (c) $(8/17)\ cm^3/sec$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (b) $V = \frac{\pi P r^4}{8\eta l} = \frac{8 cm^3}{sec}$

संयुक्त नली के लिए $V_1 = \frac{P\pi r^4}{8\eta\left(l + \frac{l}{2}\right)} = \frac{2}{3}\frac{\pi P r^4}{8\eta l} = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3}\frac{cm^3}{sec}$ $\left[\ l_1 = l = 2l_2 \text{ या } l_2 = \frac{l}{2}\right]$

Problem 58. नियत दाबशीर्ष व्यवस्था में एक नली क्षैतिजतः संलग्न है। यदि केशनली की त्रिज्या 10% बढ़ायी जाए तब द्रव प्रवाह की दर में प्रतिशत परिवर्तन होगा

(a) + 10% (b) + 46% (c) – 10% (d) – 40%

Solution : (b) $V = \frac{P\pi r^4}{8\eta l} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 \Rightarrow V_2 = V_1\left(\frac{110}{100}\right)^4 = V_1(1.1)^4 = 1.4641V$

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_2 - V_1}{V} = \frac{1.4641V - V}{V} = 0.46$ या 46%