भौतिक राशि

राशि जिसे मापा जा सके तथा जिसके द्वारा विभिन्न भौतिक घटनाओं को नियमों के रूप में समझाया तथा व्यक्त किया जा सके, भौतिक राशि कहलाती हैं। उदाहरण के लिए लम्बाई द्रव्यमान, समय, बल आदि।

दूसरी तरफ, जीवन में अन्य विभिन्न घटनायें जैसे खुशी, दुःख आदि भौतिक राशियाँ नहीं हैं क्योंकि इन्हें मापा नहीं जा सकता।

भौतिक राशि का परिमाण ज्ञात करने के लिए, दो समान भौतिक राशियों की तुलना करने के लिए तथा भौतिक नियमों या समीकरणों को सिद्ध करने के लिए, मापन आवश्यक होता है।

भौतिक राशि को इसके परिमाण तथा मात्रक द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। उदाहरण के लिए, 10 मीटर का अर्थ वह लम्बाई है जो 1 मीटर लम्बाई की 10 गुनी है। यहाँ 10 दी गई राशि का आंकिक मान है तथा मीटर से राशि का मात्रक प्रदर्शित होता है। अतः भौतिक राशि को व्यक्त करने में हम एक मात्रक चुनते हैं तथा फिर ज्ञात करते हैं कि वह मात्रक दी गई भौतिक राशि में कितने गुने तक है। अर्थात्

$$\text{भौतिक राशि } (Q) = \text{परिमाण} \times \text{मात्रक} = nu$$

जहाँ, n आंकिक मान को तथा u मात्रक को प्रदर्शित करता है। अतः भौतिक राशि की निश्चित मात्रा को व्यक्त करते समय यह स्पष्ट है कि जैसे ही मात्रक (u) परिवर्तित होता है, परिमाण (n) भी परिवर्तित हो जाता है परन्तु गुणनफल nu अपरिवर्तित बना रहता है।

अर्थात् $$n\,u = \text{नियतांक}, \quad \text{या} \quad n_1u_1 = n_2u_2 = \text{नियतांक}; \quad \therefore \; n \propto \frac{1}{u}$$

अर्थात् भौतिक राशि का परिमाण तथा मात्रक एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं।

भौतिक राशियों के प्रकार

(1) अनुपात (केवल आंकिक मान) : जब एक भौतिक राशि दो समान राशियों का अनुपात होती है तो इसका कोई मात्रक नहीं होता। उदाहरण

आपेक्षिक घनत्व = वस्तु का घनत्व/$4^{o}C$ पर पानी का घनत्व

अपवर्तनांक = वायु में प्रकाश का वेग/माध्यम में प्रकाश का वेग

विकृति = विमा में परिवर्तन/मूल विमा

- कोण एक अपवाद भौतिक राशि है जो यद्यपि दो समान भौतिक राशियों का अनुपात है। (कोण = चाप / त्रिज्या) फिर भी इसका मात्रक (डिग्री या रेडियन), इसके आंकिक मान के साथ लिखा जाता है।

(2) अदिश (केवल परिमाण) : इन राशियों की कोई दिशा नहीं होती है। जैसे – लम्बाई, समय, कार्य, ऊर्जा आदि।

भौतिक राशि का परिमाण ऋणात्मक हो सकता है। इस स्थिति में ऋणात्मक चिन्ह् इसकी दिशा को नहीं दर्शाता।

अदिश राशियों को योग या अन्तर के सामान्य नियमों की सहायता से जोड़ा या घटाया जा सकता है।

(3) सदिश (परिमाण तथा दिशा) : उदाहरण – विस्थापन, वेग, त्वरण, बल आदि।

सदिश राशियों को योग के सदिश नियमों के अनुसार जोड़ा या घटाया जा सकता है। यह नियम सामान्य नियमों से अलग होते हैं।

- कुछ भौतिक राशियाँ न तो अदिश और न ही सदिश की तरह व्यवहार करती हैं। उदाहरण के लिए जड़त्व आघूर्ण सदिश राशि नहीं है, क्योंकि घूर्णन की दिशा बदलने पर भी इसका मान अपरिवर्तित रहता है, परन्तु इसे अदिश भी नहीं कहा जा सकता, क्योंकि भिन्न–भिन्न दिशाओं में (अक्ष परिवर्तन करने पर) समान वस्तु के लिए भी इसके भिन्न–भिन्न मान प्राप्त होते हैं

मूलभूत तथा व्युत्पन्न राशियाँ

(1) **मूलभूत राशियाँ :** प्रकृति में उपलब्ध कई भौतिक राशियों में से कुछ ही राशियाँ ऐसी हैं जो अन्य राशियों से स्वतंत्र होती हैं तथा इन्हें परिभाषित करने के लिए अन्य भौतिक राशियों की आवश्यकता नहीं होती। अतः इन्हें निरपेक्ष राशियाँ कहते हैं। इन राशियों को मूलभूत राशियाँ या मूल राशियाँ भी कहते हैं क्योंकि अन्य राशियाँ इन पर निर्भर रहती हैं तथा इन राशियों के पदों में व्यक्त की जा सकती है।

(2) **व्युत्पन्न राशियाँ :** अन्य सभी भौतिक राशियों को मूलभूत राशियों की विभिन्न घातों से भाग या गुणनफल द्वारा व्युत्पन्न किया जा सकता है। अतः ये राशियाँ व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती हैं।

यदि लम्बाई को मूलभूत राशि के रूप में परिभाषित किया जाये तो क्षेत्रफल तथा आयतन, लम्बाई से व्युत्पन्न हो जाते हैं तथा लम्बाई की घात 2 या 3 के साथ व्यक्त किये जा सकते हैं।

- यांत्रिकी में लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय मूलभूत राशियाँ चुनी गई हैं, परन्तु हम यांत्रिकी में कोई भी तीन राशियाँ मूलभूत राशियों की तरह ले सकते हैं तो अन्य राशियाँ इनके पदों में व्यक्त की जा सकती है। उदाहरण के लिए, यदि चाल तथा समय को मूलभूत राशियों के रूप में लिया जाये तो लम्बाई व्युत्पन्न राशि बन जाती है क्योंकि लम्बाई अब चाल × समय के रूप में व्यक्त की जायेगी तथा यदि बल तथा त्वरण मूलभूत राशियाँ ली जायें तो द्रव्यमान को बल / त्वरण से परिभाषित किया जायेगा तथा यह व्युत्पन्न राशि कहलायेगा।

मूलभूत तथा व्युत्पन्न मात्रक

सामान्यतः प्रत्येक भौतिक राशि को परिभाषित करने के लिए एक मात्रक की आवश्यकता होती है। अतः ऐसा प्रतीत होता है कि कई भौतिक राशियों के लिये कई मात्रक अवश्य होने चाहिए। यद्यपि ऐसा नहीं है। यह पाया गया है कि यदि यांत्रिकी में हम कोई तीन भौतिक राशियों के स्वेच्छ मात्रक चुन लें तो यांत्रिकी में अन्य भौतिक राशियों को इनके पदों में व्यक्त कर सकते हैं। इस उद्देश्य के लिए द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय स्वेच्छतः चुनी गई भौतिक राशियाँ हैं। अतः यांत्रिकी में द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय के किसी भी मात्रक को मूलभूत या निरपेक्ष या मूल मात्रक कहते हैं। अन्य मात्रक जो इन मूलभूत मात्रकों के पदों में व्यक्त किये जा सकते हैं व्युत्पन्न मात्रक कहलाते हैं। उदाहरण के लिए प्रकाश वर्ष या किमी मूल मात्रक हैं, क्योंकि ये लम्बाई के मात्रक हैं। जबकि sec^{-1}, m^2 या kg/m व्युत्पन्न मात्रक हैं क्योंकि ये लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय के मात्रकों से व्युत्पन्न किये गये हैं।

मात्रकों की पद्धति : सभी प्रकार की भौतिक राशियों के लिए मूलभूत तथा व्युत्पन्न दोनों मात्रकों का समुच्चय मात्रकों की पद्धति कहलाती है। प्रचलित पद्धतियाँ निम्न प्रकार हैं –

(1) **CGS पद्धति :** यह पद्धति मात्रकों की गॉसीय पद्धति भी कहलाती है। इसमें लम्बाई, द्रव्यमान, तथा समय मूलभूत राशियों के रूप में ली जाती हैं तथा इनके संगत मात्रक क्रमशः सेण्टीमीटर (cm), ग्राम (g) तथा सैकण्ड (s) होंगे।

(2) **MKS पद्धति:** यह पद्धति जॉर्जी (Gorgi) पद्धति भी कहलाती है। इस पद्धति में भी लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय मूलभूत राशियों के रूप में लिए जाते हैं तथा इनके संगत मूल मात्रक मीटर, किलोग्राम तथा सैकण्ड होंगे।

(3) **FPS पद्धति:** इस पद्धति में फुट, पॉण्ड तथा सैकण्ड क्रमशः लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय के लिए मूलभूत मात्रक लिये जाते हैं। इस पद्धति में बल व्युत्पन्न मात्रक है जिसका मात्रक पाउण्डल है।

(4) **S. I. पद्धति :** यह मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति है तथा सम्पूर्ण भौतिकी में प्रयुक्त होने वाली विस्तृत पद्धति है। इस पद्धति में सात मूलभूत राशियाँ हैं। ये राशियाँ तथा इनके मात्रक निम्न तालिका में दिये गये हैं।

राशि	मात्रक का नाम	प्रतीक
लम्बाई	मीटर	m
द्रव्यमान	किलोग्राम	kg
समय	सैकण्ड	s
विद्युतधारा	ऐम्पियर	A
ताप	केल्विन	K

पदार्थ की मात्रा	मोल	*mol*
ज्योतितीव्रता	केण्डला	*cd*

उपरोक्त सात मूलभूत राशियों के अतिरिक्त दो पूरक राशियाँ होती हैं जिनके मात्रक निम्न हैं –

समतल कोण के लिए रेडियन (*rad*) तथा घन कोण के लिए स्टेरेडियन (*sr*)

- मूलभूत तथा व्युत्पन्न मात्रकों के अतिरिक्त हम कई बार व्यवहारिक मात्रकों का भी उपयोग करते हैं। ये व्यवहारिक मात्रक मूलभूत या व्युत्पन्न किसी भी प्रकार के हो सकते हैं।

  उदाहरण के लिए, प्रकाश वर्ष दूरी का व्यवहारिक मात्रक (मूलभूत) है जबकि अश्वशक्ति, शक्ति का व्यवहारिक (व्युत्पन्न) मात्रक है।
- व्यवहारिक मात्रक, मात्रकों की पद्धति में हो सकता है और नहीं भी लेकिन किसी भी मात्रक के पदों पद्धति में व्यक्त किया जा सकता है।

  उदाहरण के लिए, 1 मील = 1.6 किमी = 1.6×10^3 मीटर

S.I. पूर्वलग्न

AAJ KA TOPPER

भौतिकी में बहुत सूक्ष्म (माइक्रो) से बहुत बड़े (मेक्रो) परिमाणों का अध्ययन करते हैं। जैसे एक तरफ हम किसी परमाणु के बारे में बात करते हैं जबकि दूसरी तरफ ब्रम्हाण्ड की बात करते हैं। उदाहरण के लिए, इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9.1×10^{-31} *kg* जबकि सूर्य का द्रव्यमान 2×10^{30} *kg* है। ऐसे बड़े या छोटे परिमाणों को एक साथ व्यक्त करने हेतु हम निम्न पूर्व लग्नों का प्रयोग करते हैं

10 की घात	पूर्वलग्न	प्रतीक
10^{18}	ऐक्सा	*E*
10^{15}	पेटा	*P*
10^{12}	टेरा	*T*
10^{9}	गीगा	*G*
10^{6}	मेगा	*M*
10^{3}	किलो	*k*
10^{2}	हेक्टो	*h*
10^{1}	डेका	*da*
10^{-1}	डेसी	*d*
10^{-2}	सेन्टी	*c*
10^{-3}	मिली	*m*
10^{-6}	माइक्रो	μ
10^{-9}	नेनो	*n*
10^{-12}	पीको	*p*
10^{-15}	फेमटो	*f*
10^{-18}	ऑटो	*a*

लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय के मात्रक

(1) लम्बाई : मानक मीटर को प्रकाश की तरंगदैर्ध्य के पदों में परिभाषित किया गया है, इसे लम्बाई का परमाणवीय मानक कहते हैं।

''क्रिप्टॉन-86 परमाणु के द्वारा निर्वात् में उत्सर्जित नारंगी लाल रंग की 1650763.73 तरंगों की लम्बाई 1 मीटर कहलाती है''

एक अन्य परिभाषानुसार – प्रकाश के द्वारा निर्वात् में $\frac{1}{299.7792}$ सैकण्ड में तय की दूरी 1 मीटर कहलाती है।

(2) **द्रव्यमान :** मापन के अंतराष्ट्रीय ब्यूरो में प्लेटीनम इरीडीयम मिश्रधातु से बने एक मानक बेलन का द्रव्यमान 1 kg परिभाषित किया गया है।

एक अन्य परिभाषानुसार – $_6C^{12}$ तत्व के 5.0188×10^{25} परमाणुओं का द्रव्यमान 1 kg परिभाषित किया गया है।

(3) **समय :** सीजियम-133 परमाणु के विकिरण के 9192631770 कम्पनों में लगने वाला समयान्तराल 1 सैकण्ड के तुल्य होता है।

व्यवहारिक मात्रक

(1) **लम्बाई :**

(i) 1 फर्मी $= 1\ fm = 10^{-15}\ m$

(ii) 1 X-ray मात्रक $= 1XU = 10^{-13}\ m$

(iii) 1 एंगस्ट्रॉम $= 1Å = 10^{-10}\ m = 10^{-8}\ cm = 10^{-7}\ mm = 0.1\ \mu mm$

(iv) 1 माइक्रोन $= \mu m = 10^{-6}\ m$

(v) 1 खगोलीय मात्रक $= 1\ A.U. = 1.49 \times 10^{11}\ m \approx 1.5 \times 10^{11}\ m \approx 10^{8}\ km$

(vi) 1 प्रकाशवर्ष $= 1\ ly = 9.46 \times 10^{15}\ m$

(vii) 1 पारसेक $= 1pc = 3.26$ प्रकाशवर्ष

(2) **द्रव्यमान :**

(i) चन्द्रशेखर इकाई : 1 CSU = सूर्य के द्रव्यमान का 1.4 गुना $= 2.8 \times 10^{30}\ kg$

(ii) मीट्रिक टन : 1 मीट्रिक टन $= 1000\ kg$

(iii) क्विण्टल : 1 क्विण्टल $= 100\ kg$

(iv) परमाणवीय द्रव्यमान मात्रक (amu) : $1\ amu = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$ (प्रोटॉन या न्यूट्रॉन का द्रव्यमान 1 amu की कोटि का होता है।)

(3) **समय :**

(i) वर्ष : सूर्य के चारों ओर पृथ्वी को अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करने में लगा समय 1 वर्ष होता है।

(ii) चन्द्रमास् : पृथ्वी के चारों ओर चन्द्रमा द्वारा अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करने में लगा समय 1 चन्द्रमास् होता है।

1 चन्द्रमास् = 27.3 दिन

(iii) सौर दिवस : सूर्य के सापेक्ष पृथ्वी द्वारा अपनी अक्ष के परितः एक पूर्ण घूर्णन में लगा समय सौर दिन कहलाता है। चूँकि यह समय दिन प्रतिदिन परिवर्तित होता रहता है। अतः एक वर्ष में सभी दिनों के अन्तरालों का औसत लेकर औसत सौर दिन ज्ञात किया जाता है।

1 सौर वर्ष = 365.25 औसत दिवस

या औसत सौर दिवस = सौर वर्ष का $\frac{1}{365.25}$ भाग

(iv) सैडरियल दिन : किसी दूर तारे के सापेक्ष पृथ्वी द्वारा अपनी अक्ष के परितः एक पूर्ण घूर्णन में लगा समय एक सैडरियल दिन कहलाता है।

1 सौर वर्ष = 366.25 सैडरियल दिन = 365.25 औसत सौर दिन

अतः 1 सैडरियल दिन 1 सौर दिन से कम होता है।

(v) शेक : यह समय का व्यवहारिक मात्रक है, परन्तु वर्तमान में इसका उपयोग नहीं किया जाता

1 शेक = 10^{-8} सैकण्ड

भौतिक राशियों की विमाएँ

जब किसी व्युत्पन्न राशि को मूलभूत राशि के पदों में व्यक्त किया जाता है तो इसे मूलभूत राशियों की विभिन्न घातों के गुणनफल के रूप में लिखा जाता है। इन घातों को जिन्हें दी गई भौतिक राशि व्यक्त करने के लिए लगाया जाता है विमायें कहलाती है।

इसे और स्पष्ट करने के लिए भौतिक राशि बल पर विचार करते हैं

$$\text{बल} = \text{द्रव्यमान} \times \text{त्वरण} = \frac{\text{द्रव्यमान} \times \text{वेग}}{\text{समय}} = \frac{\text{द्रव्यमान} \times \text{लम्बाई} / \text{समय}}{\text{समय}} = \text{द्रव्यमान} \times \text{लम्बाई} \times (\text{समय})^{-2} \quad \text{.... (i)}$$

अत: बल की विमाएँ द्रव्यमान में 1, लम्बाई में 1 तथा समय में – 2 हैं।

यहाँ भौतिक राशि जिसे मूल राशियों के पदों में व्यक्त किया जाना है बड़े कोष्टक में लिखा जाता है। जो यह प्रदर्शित करता है कि समीकरण विमाओं के मध्य है न कि परिमाणों के मध्य।

अत: समीकरण (i) इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$[\text{बल}] = [MLT^{-2}]$$

मूलभूत राशियों के पदों में भौतिक राशि का व्यंजक विमीय समीकरण कहलाता है। यदि हम समीकरण के केवल दाहिने भाग पर विचार करें तो व्यंजक विमीय सूत्र कहलाता है।

अत: बल का विमीय सूत्र, $[MLT^{-2}]$ होगा।

सम्पूर्ण भौतिकी की महत्वपूर्ण विमाएँ

यांत्रिकी

क्रमांक	राशि	मात्रक	विमाएँ
(1)	वेग या चाल (v)	m/s	$[M^0L^1T^{-1}]$
(2)	त्वरण (a)	m/s^2	$[M^0LT^{-2}]$
(3)	संवेग (P)	$kg\text{-}m/s$	$[M^1L^1T^{-1}]$
(4)	आवेग (I)	$Newton\text{-}sec$ या $kg\text{-}m/s$	$[M^1L^1T^{-1}]$
(5)	बल (F)	$Newton$	$[M^1L^1T^{-2}]$
(6)	दाब (P)	$Pascal$	$[M^1L^{-1}T^{-2}]$
(7)	गतिज. ऊर्जा (E_K)	$Joule$	$[M^1L^2T^{-2}]$
(8)	शक्ति (P)	$Watt$ या $Joule/s$	$[M^1L^2T^{-3}]$
(9)	घनत्व (d)	kg/m^3	$[M^1L^{-3}T^0]$
(10)	कोणीय विस्थापन (θ)	$Radian$ ($rad.$)	$[M^0L^0T^0]$
(11)	कोणीय वेग (ω)	$Radian/sec$	$[M^0L^0T^{-1}]$
(12)	कोणीय त्वरण (α)	$Radian/sec^2$	$[M^0L^0T^{-2}]$
(13)	जड़त्व आघूर्ण (I)	$kg\text{-}m^2$	$[M^1L^2T^0]$
(14)	बल आघूर्ण (τ)	$Newton\text{-}meter$	$[M^1L^2T^{-2}]$
(15)	कोणीय संवेग (L)	$Joule\text{-}sec$	$[M^1L^2T^{-1}]$

क्रमांक	राशि	मात्रक	विमाएँ
(16)	बल नियतांक या स्प्रिंग नियतांक (k)	*Newton/m*	$[M^1L^0T^{-2}]$
(17)	गुरुत्वीय नियतांक (G)	$N\text{-}m^2/kg^2$	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$
(18)	गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता (E_g)	*N/kg*	$[M^0L^1T^{-2}]$
(19)	गुरुत्वीय विभव (V_g)	*Joule/kg*	$[M^0L^2T^{-2}]$
(20)	पृष्ठ तनाव (T)	*N/m* या $Joule/m^2$	$[M^1L^0T^{-2}]$
(21)	वेग प्रवणता (V_g)	$Second^{-1}$	$[M^0L^0T^{-1}]$
(22)	श्यानता गुणांक (η)	*kg/m-s*	$[M^1L^{-1}T^{-1}]$
(23)	प्रतिबल	N/m^2	$[M^1L^{-1}T^{-2}]$
(24)	विकृति	इकाई हीन	$[M^0L^0T^0]$
(25)	प्रत्यास्थता गुणांक (E)	N/m^2	$[M^1L^{-1}T^{-2}]$
(26)	पॉइजन अनुपात (σ)	इकाई हीन	$[M^0L^0T^0]$
(27)	आवर्तकाल (T)	*Second*	$[M^0L^0T^1]$
(28)	आवृत्ति (n)	*Hz*	$[M^0L^0T^{-1}]$

ऊष्मा

क्रमांक	राशि	मात्रक	विमाएँ
(1)	ताप (T)	*Kelvin*	$[M^0L^0T^0\theta^1]$
(2)	ऊष्मा (Q)	*Joule*	$[ML^2T^{-2}]$
(3)	विशिष्ट ऊष्मा (c)	*Joule/kg-K*	$[M^0L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
(4)	ऊष्मा धारिता	*Joule/K*	$[M^1L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
(5)	गुप्त ऊष्मा (L)	*Joule/kg*	$[M^0L^2T^{-2}]$
(6)	गैस नियतांक (R)	*Joule/mol-K*	$[M^1L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
(7)	बोल्ट्जमेन नियतांक (k)	*Joule/K*	$[M^1L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
(8)	ऊष्मा चालकता गुणांक (K)	*Joule/m-s-K*	$[M^1L^1T^{-3}\theta^{-1}]$
(9)	स्टीफन नियतांक (σ)	$Watt/m^2\text{-}K^4$	$[M^1L^0T^{-3}\theta^{-4}]$
(10)	वीन्स नियतांक (b)	*Meter-K*	$[M^0L^1T^0\theta^1]$
(11)	प्लांक नियतांक (h)	*Joule-s*	$[M^1L^2T^{-1}]$
(12)	रेखीय प्रसार गुणांक (α)	$Kelvin^{-1}$	$[M^0L^0T^0\theta^{-1}]$
(13)	ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक (J)	*Joule/Calorie*	$[M^0L^0T^0]$
(14)	वाण्डर वाल नियतांक (a)	$Newton\text{-}m^4$	$[ML^5T^{-2}]$
(15)	वाण्डर वाल नियतांक (b)	m^3	$[M^0L^3T^0]$

विद्युत

क्रमांक	राशि	मात्रक	विमाएँ
(1)	विद्युत आवेश (q)	*Coulomb*	$[M^0L^0T^1A^1]$
(2)	विद्युतधारा (I)	*Ampere*	$[M^0L^0T^0A^1]$
(3)	धारिता (C)	*Coulomb/volt* या *Farad*	$[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]$
(4)	विद्युत विभव (V)	*Joule/coulomb*	$[M^1L^2T^{-3}A^{-1}]$
(5)	मुक्त आकाश की विद्युतशीलता (ε_0)	$\frac{Coulomb^2}{Newton\text{-}meter^2}$	$[M^{-1}L^{-3}T^4A^2]$
(6)	परावैद्युत नियतांक (K)	इकाई हीन	$[M^0L^0T^0]$
(7)	प्रतिरोध (R)	*Volt/Ampere* या *ohm*	$[M^1L^2T^{-3}A^{-2}]$
(8)	प्रतिरोधकता या विशिष्ट प्रतिरोध (ρ)	*Ohm-meter*	$[M^1L^3T^{-3}A^{-2}]$
(9)	स्वप्रेरण गुणांक (L)	$\frac{volt-second}{ampere}$ या *henery or ohm-second*	$[M^1L^2T^{-2}A^{-2}]$
(10)	चुम्बकीय फ्लक्स (ϕ)	*Volt-second* या *weber*	$[M^1L^2T^{-2}A^{-1}]$
(11)	चुम्बकीय–प्रेरण (B)	$\frac{newton}{ampere-meter}$ $\frac{Joule}{ampere-meter^2}$ $\frac{volt-second}{meter^2}$ या *Tesla*	$[M^1L^0T^{-2}A^{-1}]$
(12)	चुम्बकन तीव्रता (H)	*Ampere/meter*	$[M^0L^{-1}T^0A^1]$
(13)	चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण (M)	*Ampere-meter*^{2}	$[M^0L^2T^0A^1]$
(14)	मुक्त आकाश की चुम्बकनशीलता (μ_0)	$\frac{Newton}{ampere^2}$ या $\frac{Joule}{ampere^2-meter}$ या $\frac{Volt-second}{ampere-meter}$ या $\frac{Ohm-second}{meter}$ या $\frac{henery}{meter}$	$[M^1L^1T^{-2}A^{-2}]$
(15)	पृष्ठीय आवेश घनत्व (σ)	$Coulomb\,metre^{-2}$	$[M^0L^{-2}T^1A^1]$
(16)	विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण (p)	$Coulomb-meter$	$[M^0L^1T^1A^1]$
(17)	चालकता (G) ($1/R$)	ohm^{-1}	$[M^{-1}L^{-2}T^3A^2]$
(18)	विशिष्ट चालकता (σ) ($1/\rho$)	$ohm^{-1}meter^{-1}$	$[M^{-1}L^{-3}T^3A^2]$
(19)	धारा घनत्व (J)	*Ampere/m*^{2}	$[M^0L^{-2}T^0A^1]$
(20)	विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (E)	*Volt/meter, Newton/coulomb*	$[M^1L^1T^{-3}A^{-1}]$
(21)	रिडवर्ग नियतांक (R)	m^{-1}	$[M^0L^{-1}T^0]$

समान विमाओं वाली भौतिक राशियाँ

क्रमांक	विमाएँ	राशियाँ
(1)	$[M^0L^0T^{-1}]$	आवृत्ति, कोणीय आवृत्ति, कोणीय वेग, वेग प्रवणता तथा क्षय नियतांक
(2)	$[M^1L^2T^{-2}]$	कार्य, आन्तरिक ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा, बल आघूर्ण, बल का आघूर्ण
(3)	$[M^1L^{-1}T^{-2}]$	दाब, प्रतिबल, यंग प्रत्यास्थता गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक, दृढ़ता गुणांक, ऊर्जा घनत्व
(4)	$[M^1L^1T^{-1}]$	संवेग, आवेग
(5)	$[M^0L^1T^{-2}]$	गुरुत्वीय त्वरण, गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता
(6)	$[M^1L^1T^{-2}]$	उछाल बल, बल, भार, ऊर्जा प्रवणता
(7)	$[M^1L^2T^{-1}]$	कोणीय संवेग तथा प्लांक नियतांक
(8)	$[M^1L^0T^{-2}]$	पृष्ठ तनाव, पृष्ठीय ऊर्जा, (ऊर्जा प्रति इकाई क्षेत्रफल)
(9)	$[M^0L^0T^0]$	विकृति, अपवर्तनांक, सापेक्ष घनत्व, कोण, घन कोण, दूरी प्रवणता, सापेक्ष विद्युतशीलता (परावैद्युतांक), सापेक्ष चुम्बकनशीलता आदि।
(10)	$[M^0L^2T^{-2}]$	गुप्त ऊष्मा तथा गुरूत्वीय विभव
(11)	$[M^0L^2T^{-2}\theta^{-1}]$	ऊष्मीय धारिता, गैस नियतांक, वोल्ट्समेन नियतांक, तथा ऐन्ट्रॉपी
(12)	$[M^0L^0T^1]$	$\sqrt{l/g}, \sqrt{m/k}, \sqrt{R/g}$, जहाँ l = लम्बाई, g = गुरुत्वीय त्वरण, m = द्रव्यमान, k = स्प्रिंग नियतांक
(13)	$[M^0L^0T^1]$	L/R, $\sqrt{LC}$, RC जहाँ L = प्रेरकत्व, R = प्रतिरोध C = धारिता
(14)	$[ML^2T^{-2}]$	$I^2Rt, \frac{V^2}{R}t, VIt, qV, LI^2, \frac{q^2}{C}, CV^2$ जहाँ I = धारा, t = समय, q = आवेश, L = प्रेरकत्व, C = धारिता, R = प्रतिरोध

विमीय विश्लेषण के अनुप्रयोग

(1) किसी भौतिक राशि का दी हुयी मात्रक पद्धति में मात्रक ज्ञात करना : किसी भौतिक राशि का सूत्र या परिभाषा लिखकर हम इसकी विमाएँ ज्ञात करते हैं। विमीय सूत्र में M, L तथा T के स्थान पर आवश्यक पद्धति के मूलभूत मात्रक रखकर उस पद्धति में हम भौतिक राशि का मात्रक ज्ञात कर लेते हैं। फिर भी कभी–कभी इस मात्रक के लिए हम एक विशिष्ट नाम दे देते हैं।

उदाहरण के लिए, कार्य = बल $\times$ विस्थापन

अतः $[W] = [MLT^{-2}] \times [L] = [ML^2T^{-2}]$

अतः C.G.S. पद्धति में इसका मात्रक $g\ cm^2/s^2$ है जिसे अर्ग कहा जाता है। जबकि M.K.S. पद्धति में $kg\ m^2/s^2$ होगा जिसे जूल कहते हैं।

Problem 1. समीकरण $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)$ = नियतांक में 'a' का मात्रक होगा [MNR 1995; AFMC 1995]

(a) डायन $\times$ सेमी^{5} (b) डायन $\times$ सेमी^{4} (c) डायन / सेमी^{3} (d) डायन / सेमी^{2}

Solution : (b) विमीय समांगता के सिद्धान्त से $[P] = \left[\frac{a}{V^2}\right]$

$\Rightarrow [a] = [P]\,[V^2] = [ML^{-1}T^{-2}][L^6] = [ML^5T^{-2}]$

या 'a' का मात्रक = ग्राम × सेमी^{5} × सैकण्ड$^{-2}$ = डायन × सेमी^{4}

Problem 2. यदि $x = at + bt^2$, जहाँ x वस्तु द्वारा 'किमी' में चली गई दूरी तथा t सैकण्ड में समय हो तो b का मात्रक है [CBSE PMT 1993]

(a) km/s (b) $km\text{-}s$ (c) km/s^2 (d) $km\text{-}s^2$

Solution : (c) विमीय समांगता सिद्धान्त से, $[x] = [bt^2] \Rightarrow [b] = \left[\frac{x}{t^2}\right]$ $\therefore$ b का मात्रक = km/s^2.

Problem 3. निरपेक्ष विद्युतशीलता का मात्रक है [EAMCET (Med.) 1995; Pb. PMT 2001]

(a) फैरड–मीटर (b) फैरड / मीटर (c) फैरड / मीटर^2 (d) फैरड

Solution : (b) सूत्र $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ से $\therefore \varepsilon_0 = \frac{C}{4\pi R}$

धारिता तथा त्रिज्या के मात्रक रखने पर ε_0 का मात्रक फैरड / मीटर

Problem 4. स्टीफन नियतांक का मात्रक है [MP PMT 1989]

(a) Js^{-1} (b) $Jm^{-2}s^{-1}K^{-4}$ (c) Jm^{-2} (d) Js

Solution : (b) स्टीफन का सूत्र $\frac{Q}{At} = \sigma T^4$ $\therefore$ $\sigma = \frac{Q}{AtT^4}$ $\therefore$ σ का मात्रक = $\frac{\text{जूल}}{\text{मीटर}^2 \times \text{सैकण्ड} \times K^4} = Jm^{-2}s^{-1}K^{-4}$

Problem 5. SI पद्धति में पृष्ठ तनाव का मात्रक है

[MP PMT 1984; AFMC 1986; CPMT 1985, 87; CBSE 1993; Karnataka CET (Engg/Med.) 1999; DCE 2000, 01]

(a) डायन / सेमी^{2} (b) न्यूटन / मीटर (c) डायन / सेमी (d) न्यूटन / मीटर^2

Solution : (b) पृष्ठ तनाव के सूत्र $T = \frac{F}{l}$ में

बल तथा लम्बाई के S.I. मात्रक रखने पर हम पृष्ठ तनाव का मात्रक प्राप्त कर सकते हैं।

पृष्ठ तनाव का मात्रक = न्यूटन / मीटर

Problem 6. गुरुत्वीय नियतांक की इकाई हैं [MNR 1988]

(a) किग्रा मीटर सैकण्ड$^{-1}$ (b) न्यूटन मीटर$^{-1}$सैकण्ड (c) न्यूटन मीटर^{2}किग्रा$^{-2}$ (d) किग्रा मीटर सैकण्ड$^{-1}$

Solution : (c) चूँकि $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ $\therefore G = \frac{Fr^2}{m_1m_2}$

उपरोक्त राशियों के मात्रक रखने पर G का मात्रक = न्यूटन मीटर^2 किग्रा$^{-2}$ होगा।

Problem 7. सार्वत्रिक गैस नियतांक (R) का S.I. मात्रक है

[MP Board 1988; JIPMER 1993; AFMC 1996; MP PMT 1987, 94; CPMT 1984, 87; UPSEAT 1999]

(a) वाट K^{-1}मोल$^{-1}$ (b) न्यूटन K^{-1}मोल$^{-1}$ (c) जूल K^{-1}मोल$^{-1}$ (d) अर्ग K^{-1}मोल$^{-1}$

Solution : (c) आदर्श गैस समीकरण $PV = nRT$ $\therefore [R] = \frac{[P][V]}{[nT]} = \frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^3]}{[\text{मोल}]\,[K]} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[\text{मोल}] \times [K]}$

अतः इसका मात्रक जूल K^{-1} मोल$^{-1}$ होगा।

(2) भौतिक नियतांक या गुणांक की विमाएँ ज्ञात करना : इसके लिए हमें सर्वप्रथम ऐसा सूत्र या व्यंजक लिखना चाहिए जिसमें वह नियतांक प्रयुक्त होता हो जिसकी विमा ज्ञात करनी है। तत्पश्चात् उस सूत्र में शेष सभी राशियों की विमाओं को प्रतिस्थापित करके, अज्ञात नियतांक की विमा प्राप्त की जा सकती है।

(i) गुरुत्वीय नियतांक : न्यूटन के गुरूत्वाकर्षण नियम से $F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ या $G = \dfrac{Fr^2}{m_1m_2}$

सभी भौतिक राशियों की विमाएँ रखने पर $[G] = \dfrac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]} = [M^{-1}L^3T^{-2}]$

(ii) प्लांक नियतांक : प्लांक के अनुसार $E = h\nu$ या $h = \dfrac{E}{\nu}$

सभी भौतिक राशियों की विमाएँ रखने पर $[h] = \dfrac{[ML^2T^{-2}]}{[T^{-1}]} = [ML^2T^{-1}]$

(iii) श्यानता गुणांक : पॉइसली सूत्र के अनुसार $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\pi pr^4}{8\eta l}$ या $\eta = \dfrac{\pi pr^4}{8l(dV/dt)}$

सभी भौतिक राशियों की विमाएँ रखने पर $[\eta] = \dfrac{[ML^{-1}T^{-2}][L^4]}{[L][L^3/T]} = [ML^{-1}T^{-1}]$

Problem 8. यदि X तथा Z क्रमशः धारिता तथा चुम्बकीय क्षेत्र को दर्शाते हों तो (MKSA) पद्धति में Y की विमा क्या होगी जबकि X, Y और Z में निम्न सम्बन्ध है $X = 3YZ^2$ [MP PMT 2003]

(a) $M^{-3}L^{-2}T^{-4}A^{-1}$ (b) ML^{-2} (c) $M^{-3}L^{-2}T^4A^4$ (d) $M^{-3}L^{-2}T^8A^4$

Solution : (d) $X = 3YZ^2 \therefore [Y] = \dfrac{[X]}{[Z^2]} = \dfrac{[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]}{[MT^{-2}A^{-1}]^2} = [M^{-3}L^{-2}T^8A^4]$

Problem 9. $\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ की विमा है जहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं [AIEEE 2003]

(a) $[LT^{-1}]$ (b) $[L^{-1}T]$ (c) $[L^{-2}T^2]$ (d) $[L^2T^{-2}]$

Solution : (d) हम जानते हैं कि प्रकाश का वेग $C = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \therefore \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = C^2$

$\therefore$ अतः $\left[\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\right] = [LT^{-1}]^2 = [L^2T^{-2}]$

Problem 10. यदि L, C और R क्रमशः प्रेरकत्व, धारिता तथा प्रतिरोध को प्रदर्शित करते हैं तो C^2LR का विमीय सूत्र है [UPSEAT 2002]

(a) $[ML^{-2}T^{-1}I^0]$ (b) $[M^0L^0T^3I^0]$ (c) $[M^{-1}L^{-2}T^6I^2]$ (d) $[M^0L^0T^2I^0]$

Solution : (b) $[C^2LR] = \left[C^2L^2\dfrac{R}{L}\right] = \left[(LC)^2\left(\dfrac{R}{L}\right)\right]$

और हम जानते हैं कि LC परिपथ की आवृत्ति $f = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ है। अर्थात् LC की विमा $[T^2]$ के बराबर होगी।

तथा $\left[\dfrac{L}{R}\right]$, $L-R$ परिपथ का समय नियतांक होता है। अतः $\left[\dfrac{L}{R}\right]$ की विमाएँ $[T]$ के बराबर होगी

उपरोक्त विमाएँ दिये गये सूत्र में रखने पर $\left[(LC)^2\left(\frac{R}{L}\right)\right] = [T^2]^2[T^{-1}] = [T^3]$ ।

Problem 11. बल $F = at + bt^2$; है जहाँ t समय है तो a तथा b की विमाएँ क्रमशः होगीं [BHU 1998; AFMC 2001]

(a) MLT^{-3} तथा ML^2T^{-4} (b) MLT^{-3} तथा MLT^{-4} (c) MLT^{-1} तथा MLT^0 (d) MLT^{-4} तथा MLT^1

Solution : (b) विमीय समांगता के सिद्धांत से $[F] = [at]$ $\therefore [a] = \left[\frac{F}{t}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{T}\right] = [MLT^{-3}]$

इसीप्रकार $[F] = [bt^2]$ $\therefore [b] = \left[\frac{F}{t^2}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{T^2}\right] = [MLT^{-4}]$

Problem 12. किसी समय t पर कण की स्थिति $x(t) = \left(\frac{v_0}{\alpha}\right)(1 - c^{-\alpha t})$ से दी जाती है जहाँ v_0 एक नियतांक है तथा $\alpha > 0$ तो v_0 तथा α की विमाएँ [CBSE PMT 1995]

(a) $M^0L^1T^{-1}$ एवं T^{-1} (b) $M^0L^1T^0$ एवं T^{-1} (c) $M^0L^1T^{-1}$ एवं LT^{-2} (d) $M^0L^1T^{-1}$ एवं T

Solution : (a) विमीय समांगता के सिद्धान्त से, $[\alpha t] =$ विमाहीन $\therefore [\alpha] = \left[\frac{1}{t}\right] = [T^{-1}]$

इसी प्रकार $[x] = \frac{[v_0]}{[\alpha]}$ $\therefore [v_0] = [x][\alpha] = [L][T^{-1}] = [LT^{-1}]$

Problem 13. सूत्र बल $= \frac{X}{\text{घनत्व}}$ द्वारा X की विमा प्राप्त होगी [DCE 1993]

(a) $M^1L^4T^{-2}$ (b) $M^2L^{-2}T^{-1}$ (c) $M^2L^{-2}T^{-2}$ (d) $M^1L^{-2}T^{-1}$

Solution : (c) $[X]$ = [बल] × [घनत्व] = $[MLT^{-2}] \times [ML^{-3}] = [M^2L^{-2}T^{-2}]$

Problem 14. इकाई समय में X- अक्ष के लम्बवत् एकांक क्षेत्रफल से गुजरने वाले कणों की संख्या $n = -D\frac{n_2 - n_1}{x_2 - x_1}$ द्वारा दी जाती है। यहाँ n_1 एवं n_2 क्रमशः x_2 एवं x_1 स्थिति में प्रति इकाई आयतन में स्थित कणों की संख्या है, तब विसरण गुणांक D का विमीय सूत्र होगा [CPMT 1979]

(a) M^0LT^2 (b) $M^0L^2T^{-4}$ (c) M^0LT^{-3} (d) $M^0L^2T^{-1}$

Solution : (d) (n) = इकाई समय में इकाई क्षेत्रफल से गुजरने वाले कणों की संख्या = $\frac{\text{कणों की संख्या}}{A \times t} = \frac{[M^0L^0T^0]}{[L^2]\,[T]} = [L^{-2}T^{-1}]$

$[n_1] = [n_2] =$ इकाई आयतन में कणों की संख्या = $[L^{-3}]$

दिये गये सूत्र से $[D] = \frac{[n][x_2 - x_1]}{[n_2 - n_1]} = \frac{[L^{-2}T^{-1}][L]}{[L^{-3}]} = [L^2T^{-1}]$

Problem 15. E, m, l तथा G क्रमशः ऊर्जा, द्रव्यमान, कोणीय संवेग तथा गुरूत्वाकर्षण नियतांक को प्रदर्शित करते हैं तो $\frac{El^2}{m^5G^2}$ की विमाएँ हैं [AIIMS 1985]

(a) कोण (b) लम्बाई (c) द्रव्यमान (d) समय

Solution : (a) $[E]$ = ऊर्जा = $[ML^2T^{-2}]$, m = द्रव्यमान = $[M]$, $[l]$ = कोणीय संवेग = $[ML^2T^{-1}]$

$[G]$ = गुरुत्वीय नियतांक = $[M^{-1}L^3T^{-2}]$

उपरोक्त राशियों की विमाएँ $\frac{Fl^2}{m^5G^2}$ में रखने पर $\frac{Fl^2}{m^5G^2} = \frac{[ML^2T^{-2}]\times[ML^2T^{-1}]^2}{[M^5]\times[M^{-1}L^3T^{-2}]^2} = [M^0L^0T^0]$

अर्थात् यह राशि 'कोण' होनी चाहिए।

Problem 16. तरंग समीकरण $Y = A\sin\omega\left(\frac{x}{v}-k\right)$ से दी जाती है जहाँ ω कोणीय वेग तथा v रेखीय वेग है तो k की विमाएँ होंगी [MP PMT 1993]

(a) LT (b) T (c) T^{-1} (d) T^2

Solution : (b) विमीय समांगता के सिद्धांत से $[k] = \left[\frac{x}{v}\right] = \left[\frac{L}{LT^{-1}}\right] = [T]$

Problem 17. किसी कण की स्थितिज ऊर्जा, नियत बिन्दु से दूरी x के सापेक्ष $U = \frac{A\sqrt{x}}{x^2+B}$ के अनुसार परिवर्तित होती है। जहाँ A तथा B विमीय नियतांक है, AB का विमीय सूत्र है

(a) $ML^{7/2}T^{-2}$ (b) $ML^{11/2}T^{-2}$ (c) $M^2L^{9/2}T^{-2}$ (d) $ML^{13/2}T^{-3}$

Solution : (b) विमीय समांगता के सिद्धांत से $[x^2] = [B]$ $\therefore [B] = [L^2]$

एवं $[U] = \frac{[A][x^{1/2}]}{[x^2]+[B]} \Rightarrow [ML^2T^{-2}] = \frac{[A][L^{1/2}]}{[L^2]}$ $\therefore [A] = [ML^{7/2}T^{-2}]$

अब $[AB] = [ML^{7/2}T^{-2}]\times[L^2] = [ML^{11/2}T^{-2}]$

Problem 18. $\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$ की विमाएँ होंगी (जहाँ ε_0 = मुक्त आकाश की विद्युतशीलता; E = विद्युत क्षेत्र) [IIT-JEE 1999]

(a) MLT^{-1} (b) ML^2T^{-2} (c) $ML^{-1}T^{-2}$ (d) ML^2T^{-1}

Solution : (c) ऊर्जा घनत्व = $\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = \frac{\text{ऊर्जा}}{\text{आयतन}} = \left[\frac{ML^2T^{-2}}{L^3}\right] = [ML^{-1}T^{-2}]$

Problem 19. विमीय विश्लेषण का उपयोग करके निम्न समाकलन में n का मान ज्ञात कीजिए $\int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{1/2}} = a^n\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}-1\right)$

(a) 1 (b) – 1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

Solution : (c) माना x = लम्बाई $\therefore [X]=[L]$ तथा $[dx]=[L]$

विमीय समांगता के सिद्धांत से, $\left[\frac{x}{a}\right]$ = विमाहीन $\therefore [a]=[x]=[L]$

दोनों ओर प्रत्येक राशि की विमाएँ रखने पर, $\frac{[L]}{[L^2-L^2]^{1/2}} = [L^n]$ $\therefore n=0$

Problem 20. सूत्र $P = \frac{B^2l^2}{m}$ में P की विमाएँ होंगी। (B = चुम्बकीय प्रेरण, l = लम्बाई तथा m = द्रव्यमान)

(a) MLT^{-3} (b) $ML^2T^{-4}I^{-2}$ (c) $M^2L^2T^{-4}I$ (d) $MLT^{-2}I^{-2}$

Solution : (b) $F = BIL$ $\therefore [B]$ की विमाएँ $= \frac{[F]}{[I][L]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[I][L]} = [MT^{-2}I^{-1}]$

$[P]$ की विमाएँ $= \frac{B^2 l^2}{m} = \frac{[MT^{-2}I^{-1}]^2 \times [L^2]}{[M]} = [ML^2T^{-4}I^{-2}]$

Problem 21. अप्रगामी तरंग समीकरण $y = 2a\sin\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ से दी जाती है। निम्न में से कौनसा कथन गलत है

(a) ct का मात्रक λ के समान है

(b) x का मात्रक λ के समान है

(c) $2\pi c/\lambda$ का मात्रक $2\pi x/\lambda t$ के समान है

(d) c/λ का मात्रक x/λ के समान है

Solution : (d) यहाँ, $\frac{2\pi ct}{\lambda}$ तथा $\frac{2\pi x}{\lambda}$ विमाहीन (कोण) है अर्थात् $\left[\frac{2\pi ct}{\lambda}\right] = \left[\frac{2\pi x}{\lambda}\right] = [M^0L^0T^0]$

अतः (i) ct का मात्रक λ के समान है (ii) x का मात्रक λ के समान है (iii) $\left[\frac{2\pi c}{\lambda}\right] = \left[\frac{2\pi x}{\lambda t}\right]$

तथा (iv) $\frac{x}{\lambda}$ विमाहीन है, जबकि $\frac{c}{\lambda}$ विमायुक्त होगा।

(3) **किसी भौतिक राशि को एक पद्धति से अन्य पद्धति में बदलना** : भौतिक राशि का परिमाण $P = nu$ नियत होता है।

यदि किसी भौतिक राशि X का विमीय सूत्र $[M^aL^bT^c]$ है तथा यदि भौतिक राशि के मात्रक दो पद्धतियों में क्रमशः $[M_1^aL_1^bT_1^c]$ तथा $[M_2^aL_2^bT_2^c]$ है तथा n_1 तथा n_2 इन दो पद्धतियों में क्रमशः आंकिक मान हैं तो $n_1[u_1] = n_2[u_2]$

$\Rightarrow n_1[M_1^aL_1^bT_1^c] = n_2[M_2^aL_2^bT_2^c]$

$$\Rightarrow n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

जहाँ, M_1, L_1 तथा T_1 प्रथम (ज्ञात) पद्धति में द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय के मूल मात्रक हैं तथा M_2, L_2 तथा T_2 द्वितीय (अज्ञात) पद्धति में द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय के मूल मात्रक है। अतः दोनों पद्धतियों में मूल मात्रकों के मान ज्ञात होने पर तथा प्रथम पद्धति में आंकिक मान ज्ञात होने पर अन्य पद्धति में आंकिक मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण: (1) न्यूटन का डाइन में रूपान्तरण।

बल का S.I. मात्रक न्यूटन है तथा इसका विमीय सूत्र $[MLT^{-2}]$ है।

अतः $1\ N = 1\ kg\text{-}m/sec^2$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c = 1\left[\frac{kg}{gm}\right]^1\left[\frac{m}{cm}\right]^1\left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2} = 1\left[\frac{10^3\,gm}{gm}\right]^1\left[\frac{10^3\,cm}{cm}\right]^1\left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2} = 10^5$$

$\therefore$ 1 न्यूटन $= 10^5$ डाइन

(2) गुरुत्वीय नियतांक (G) को C.G.S. से M.K.S. पद्धति में बदलना

C.G.S. पद्धति में G का मान 6.67×10^{-8} C.G.S. मात्रक होता है जबकि इसका विमीय सूत्र $[M^{-1}L^3T^{-2}]$

अतः $G = 6.67 \times 10^{-8}\ cm^3/g\ s^2$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c = 6.67\times10^{-8}\left[\frac{gm}{kg}\right]^{-1}\left[\frac{cm}{m}\right]^3\left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2}$$

$$= 6.67\times10^{-8}\left[\frac{gm}{10^3 gm}\right]^{-1}\left[\frac{cm}{10^2 cm}\right]^3\left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2} = 6.67\times10^{-11}$$

$\therefore$ $G = 6.67\times10^{-11}$ M.K.S. मात्रक

Problem 22. किसी भौतिक राशि के मापन पर इसका मान nu प्राप्त होता है जहाँ $n =$ आंकिक मान तथा $u =$ मात्रक है। तो निम्न में से कौनसा सम्बन्ध सत्य है [RPET 2003]

(a) $n \propto u^2$ (b) $n \propto u$ (c) $n \propto \sqrt{u}$ (d) $n \propto \frac{1}{u}$

Solution : (d) हम जानते हैं कि $P = nu =$ नियतांक $\therefore n_1u_1 = n_2u_2$ या $n \propto \frac{1}{u}$

Problem 23. C.G.S. पद्धति में बल का परिमाण 100 डाइन है। अन्य पद्धति में जहाँ मूलभूत राशियाँ किलोग्राम, मीटर तथा मिनट हैं, बल का परिमाण होगा [EAMCET 2001]

(a) 0.036 (b) 0.36 (c) 3.6 (d) 36

Solution : (c) $n_1 = 100$, $M_1 = g$, $L_1 = cm$, $T_1 = \sec$ तथा $M_2 = kg$, $L_2 = metre$, $T_2 = minute$, $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$

इन मानों को सूत्र $n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^x\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^y\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^z$ में रखने पर

$$n_2 = 100\left[\frac{gm}{kg}\right]^1\left[\frac{cm}{metre}\right]^1\left[\frac{\sec}{\text{minute}}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 100\left[\frac{gm}{10^3 gm}\right]^1\left[\frac{cm}{10^2 cm}\right]^1\left[\frac{sec}{60\,sec}\right]^{-2} = 3.6$$

Problem 24. कैल्विन पैमाने पर किसी वस्तु का ताप X K पाया गया। जब इसे फेरनहाइट तापमापी से मापा जाये तो यह X F प्राप्त होता है। तो X का मान है [UPSEAT 2000]

(a) 301.25 (b) 574.25 (c) 313 (d) 40

Solution : (c) सेन्टीग्रेड तथा फेरनहाइट में सम्बन्ध $\frac{K-273}{5} = \frac{F-32}{9}$

प्रश्न के अनुसार $\frac{X-273}{5} = \frac{X-32}{9}$ $\therefore$ $X = 313$

Problem 25. कौनसा सम्बन्ध गलत है [RPMT 1997]

(a) 1 कैलोरी = 4.18 जूल (b) $1Å = 10^{-10} m$

(c) $1\ MeV = 1.6\times10^{-13}$ जूल (d) 1 न्यूटन $= 10^{-5}$ डाइन

Solution : (d) क्योंकि, 1 न्यूटन $= 10^5$ डाइन

Problem 26. किसी तार का यंग मापांक ज्ञात करने के लिए सूत्र $Y = \frac{F}{A}.\frac{L}{\Delta l}$ का उपयोग किया जाता है। जहाँ $L=$ लम्बाई, A= तार का अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल, $\Delta L =$ तार की लम्बाई में परिवर्तन जबकि इसे F बल से खींचा जाये। यंग मापांक को C.G.S. पद्धति से M.K.S. पद्धति मे परिवर्तन के लिए रूपान्तरण गुणांक होगा [MP PET 1983]

(a) 1 (b) 10 (c) 0.1 (d) 0.01

Solution : (c) हम जानते हैं यंग मापांक की विमाएँ $[ML^{-1}T^{-2}]$ हैं

C.G.S. पद्धति में इसका मात्रक $gm\ cm^{-1}\sec^{-2}$ तथा M.K.S. पद्धति में : $kg.\ m^{-1}\ sec^{-2}$ होगा।

रूपान्तरण सूत्र से $n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^1\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{-1}\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-2} = \left[\frac{gm}{kg}\right]^1\left[\frac{cm}{metre}\right]^{-1}\left[\frac{\sec}{\sec}\right]^{-2}$

अतः रूपान्तरण गुणांक $\frac{n_2}{n_1} = \left[\frac{gm}{10^3 gm}\right]^1\left[\frac{cm}{10^2 cm}\right]^{-1}\left[\frac{\sec}{\sec}\right]^{-2} = \frac{1}{10} = 0.1$

<u>*Problem*</u> 27. 1 MW शक्ति का ऐसी नयी पद्धति में रूपान्तरण करने पर जिसमें द्रव्यमान, लम्बाई, तथा समय के मूल मात्रक क्रमशः $10kg$, $1dm$ तथा 1 मिनिट हों, परिवर्तन गुणांक होगा

(a) 2.16×10^{12} मात्रक (b) 1.26×10^{12} मात्रक (c) 2.16×10^{10} मात्रक (d) 2×10^{14} मात्रक

Solution : (a) $[P] = [ML^2T^{-3}]$

अब $n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^x\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^y\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^z = 1\times10^6\left[\frac{1\,kg}{10\,kg}\right]^1\left[\frac{1m}{1\,dm}\right]^2\left[\frac{1s}{1\min}\right]^{-3}$ [चूँकि $1MW = 10^6 W$]

$= 10^6\left[\frac{1kg}{10kg}\right]\left[\frac{10\,dm}{1\,dm}\right]^2\left[\frac{1sec}{60sec}\right]^{-3} = 2.16\times10^{12}$ मात्रक

<u>*Problem*</u> 28. किन्हीं दो मात्रक पद्धतियों में वेग, त्वरण तथा बलों में निम्न सम्बन्ध हैं $v_2 = \frac{\alpha^2}{\beta}v_1$, $a_2 = \alpha\beta a_1$ तथा $F_2 = \frac{F_1}{\alpha\beta}$ जहाँ α और β नियतांक हैं। इन पद्धतियों में द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय के बीच सम्बन्ध होगा

(a) $M_2 = \frac{\alpha}{\beta}M_1, L_2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}L_1, T_2 = \frac{\alpha^3 T_1}{\beta}$ (b) $M_2 = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}M_1, L_2 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}L_1, T_2 = T_1\frac{\alpha}{\beta^2}$

(c) $M_2 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1, L_2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}L_1, T_2 = \frac{\alpha}{\beta}T_1$ (d) $M_2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}M_1, L_2 = \frac{\alpha}{\beta^2}L_1, T_2 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}T_1$

Solution : (b) $v_2 = v_1\frac{\alpha^2}{\beta} \Rightarrow [L_2T_2^{-1}] = [L_1T_1^{-1}]\frac{\alpha^2}{\beta}$ ......(i)

$a_2 = a_1\alpha\beta \Rightarrow [L_2T_2^{-2}] = [L_1T_1^{-2}]\alpha\beta$ ......(ii)

तथा $F_2 = \frac{F_1}{\alpha\beta} \Rightarrow [M_2L_2T_2^{-2}] = [M_1L_1T_1^{-2}]\times\frac{1}{\alpha\beta}$ ......(iii)

समीकरण (iii) में समीकरण (ii) का भाग देने पर हमें प्राप्त होगा $M_2 = \frac{M_1}{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} = \frac{M_1}{\alpha^2\beta^2}$

समीकरण (i) का वर्ग करने तथा समीकरण (ii) से भाग करने पर हमें प्राप्त होगा $L_2 = L_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}$

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से भाग देने पर हमें प्राप्त होगा $T_2 = T_1\frac{\alpha}{\beta^2}$

Problem 29. यदि लम्बाई, समय तथा द्रव्यमान के वर्तमान मात्रकों (m, s, kg) को क्रमशः $100m$, $100s$, तथा $\frac{1}{10}kg$ में बदल दिया जाय तो

(a) वेग का नया मात्रक 10 गुना बढ़ जायेगा (b) बल का नया मात्रक $\frac{1}{1000}$ गुना घट जायेगा

(c) ऊर्जा का नया मात्रक 10 गुना बढ़ जायेगा (d) दाब का नया मात्रक 1000 गुना बढ़ जायेगा

Solution : (b) वेग का मात्रक $= m/sec$; नयी पद्धति में $= \frac{100m}{100\,sec} = \frac{m}{sec}$ (समान)

बल का मात्रक $= \frac{kg\times m}{sec^2}$; नयी पद्धति में $= \frac{1}{10}kg\times\frac{100m}{100\,sec\times 100\,sec} = \frac{1}{1000}\frac{kg\times m}{sec^2}$

ऊर्जा का मात्रक $= \frac{kg\times m^2}{sec^2}$; नयी पद्धति में $= \frac{1}{10}kg\times\frac{100m\times 100m}{100\,sec\times 100\,sec} = \frac{1}{10}\frac{kg\times m^2}{sec^2}$

दाब का मात्रक $= \frac{kg}{m\times sec^2}$; नयी पद्धति में $= \frac{1}{10}kg\times\frac{1}{100}m\times\frac{1}{100\,sec\times 100\,sec} = 10^{-7}\frac{kg}{m\times sec^2}$

Problem 30. माना हम एक नई पद्धति का उपयोग करते हैं जिसमें द्रव्यमान का मात्रक 100 *kg*, लम्बाई का मात्रक 1 *km* तथा समय का मात्रक 100 *s* है तथा ऊर्जा का मात्रक *eluoj* (जूल को उल्टे क्रम में लिखा गया है) हो, तो

(a) 1 *eluoj* = 10^4 *Joule* (b) 1 *eluoj* = 10^{-3} *Joule* (c) 1 *eluoj* = 10^{-4} *Joule* (d) 1 *Joule* = 10^3 *eluoj*

Solution : (a) $[E] = [ML^2T^{-2}]$

1 *eluoj* $= [100kg]\times[1km]^2\times[100\,sec]^{-2} = 100kg\times 10^6 m^2\times 10^{-4}\,sec^{-2} = 10^4\,kg\,m^2\times sec^{-2} = 10^4$ जूल

Problem 31. यदि 1ग्राम सेमी सैकण्ड$^{-1}$ = x *N-s*, तो x का मान होगा

(a) 1×10^{-1} (b) 3×10^{-2} (c) 6×10^{-4} (d) 1×10^{-5}

Solution : (d) ग्राम - सेमी सैकण्ड$^{-1}$ $= 10^{-3}kg\times10^{-2}m\times s^{-1} = 10^{-5}kg\times m\times s^{-1} = 10^{-5}\,Ns$

(4) दिये गये भौतिक सम्बंध की विमीय रूप से शुद्धता की जाँच करना : यह "विमीय समांगता के सिद्धांत" पर आधारित है। इस सिद्धांत के अनुसार समीकरण के दोनों ओर के प्रत्येक पदों की विमाएँ अवश्य समान होनी चाहिए।

यदि $X = A \pm (BC)^2 \pm \sqrt{DEF}$,

तो विमीय समांगता के सिद्धान्त से $[X] = [A] = [(BC)^2] = [\sqrt{DEF}]$

यदि दोनों ओर के प्रत्येक पद की विमाएँ समान हैं तो समीकरण विमीय रूप से शुद्ध होगा अन्यथा नहीं। एक विमीय रूप से शुद्ध समीकरण आंकिक रूप से शुद्ध हो सकता है और नहीं भी।

उदाहरण : (i) $F = mv^2/r^2$

उपरोक्त सम्बन्ध में भौतिक राशियों की विमाएँ रखने पर –

$$[MLT^{-2}] = [M][LT^{-1}]^2/[L]^2$$

अर्थात् $[MLT^{-2}] = [MT^{-2}]$

चूँकि उपरोक्त समीकरण में दोनों ओर की विमाएँ समान नहीं हैं; यह सूत्र विमीय रूप से शुद्ध नहीं है, अतः भौतिक रूप से भी शुद्ध नहीं हो सकता।

(ii) $s = ut - (1/2)at^2$

उपरोक्त सम्बन्ध में भौतिक राशियों की विमाएँ रखने पर –

$[L] = [LT^{-1}][T] - [LT^{-2}][T^2]$

अर्थात् $[L] = [L] - [L]$

चूँकि उपरोक्त समीकरण में दोनों ओर प्रत्येक पद की विमाएँ समान हैं। अतः यह समीकरण विमीय रूप से शुद्ध है। और चूँकि गति के समीकरण से हम जानते हैं कि $s = ut + (1/2)at^2$ अतः यह समीकरण आंकिक रूप से भी शुद्ध है।

Problem 32. विमीय रूप से, निम्न में से कौनसा समीकरण शुद्ध है [CPMT 1983]

(a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ (c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{GM}{R^2}}$ (d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{GM}}$

Solution : (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ [As $GM = gR^2$]

दोनों ओर प्रत्येक पद की विमाएँ रखने पर

$$[T] = \left[\frac{L}{LT^{-2}}\right]^{1/2} = [T]$$

L.H.S. = R.H.S. अर्थात् उपरोक्त समीकरण शुद्ध है।

AAJ KA TOPPER

Problem 33. द्रव्यमान M तथा भुजा L का एक पूर्णतः दृढ़ घनाकार गुटका A, अन्य समान विमाओं तथा अन्य दृढ़ता गुणांक वाले घनाकार गुटके B पर इस प्रकार रखा है कि A का निम्न तल B के ऊपरी फलक को पूर्ण रूप से ढक लेता है। B का निम्न फलक क्षैतिज पृष्ठ पर दृढ़ता पूर्वक रखा है। गुटके A की एक फलक पर भुजा के लम्बवत एक अत्यल्प बल F लगाया जाता है। बल हटा लेने के बाद गुटका A, दोलन करने लगता है। इसका आवर्तकाल होगा [IIT-JEE 1992]

(a) $2\pi\sqrt{\frac{M\eta}{L}}$ (b) $2\pi\sqrt{\frac{L}{M\eta}}$ (c) $2\pi\sqrt{\frac{ML}{\eta}}$ (d) $2\pi\sqrt{\frac{M}{\eta L}}$

Solution : (d) दिया है M = द्रव्यमान = $[M]$, η = दृढ़तागुणांक = $[ML^{-1}T^{-2}]$, L = लम्बाई = $[L]$

इन राशियों की विमाएँ दिये गये समीकरण में रखने पर समीकरण की शुद्धता की जाँच कर सकते हैं।

$$[T] = 2\pi\left(\frac{[M]}{[\eta][L]}\right)^{1/2} = \left[\frac{M}{ML^{-1}T^{-2}L}\right]^{1/2} = [T]$$

L.H.S. = R.H.S. अर्थात् उपरोक्त सूत्र शुद्ध है।

Problem 34. एक r त्रिज्या की छोटी स्टील की गेंद श्यानता गुणांक η वाले श्यान द्रव के स्तम्भ में गुरुत्व के प्रभाव में गिरायी जाती है। कुछ समय बाद गेंद का वेग नियत हो जाता है जिसे सीमान्त वेग v_T कहते हैं। सीमान्त वेग निर्भर करता है (i) गेंद के द्रव्यमान पर (ii) η (iii) r तथा (iv) गुरुत्वीय त्वरण g पर। तो निम्न में से कौनसा सम्बन्ध विमीय रूप से शुद्ध है

[CPMT 1992; CBSE 1992; NCERT 1983; MP PMT 2001]

(a) $v_T \propto \frac{mg}{\eta r}$ (b) $v_T \propto \frac{\eta r}{mg}$ (c) $v_T \propto \eta rmg$ (d) $v_T \propto \frac{mgr}{\eta}$

Solution : (a) दिया है v_T = सीमान्त वेग = $[LT^{-1}]$, m = द्रव्यमान = $[M]$, g = गुरूत्वीय त्वरण = $[LT^{-2}]$

r = त्रिज्या = $[L]$, η = श्यानता गुणांक = $[\eta]$

प्रत्येक राशि के विमीय सूत्र लिखने पर हम दिये गये सूत्र $v_T \propto \frac{mg}{\eta r}$ की सत्यता की जाँच कर सकते हैं

$\therefore\ [LT^{-1}] = \dfrac{[M][LT^{-2}]}{[ML^{-1}T^{-1}][L]} = [LT^{-1}]$

L.H.S. = R.H.S. अर्थात् उपरोक्त सूत्र सत्य है।

Problem 35. l लम्बाई तथा r त्रिज्या की नली से प्रति सैकण्ड बहते द्रव (जिसका श्यानता गुणांक η है तथा नली के सिरों के बीच दाबान्तर P है) के आयतन के लिए विमीय रूप से शुद्ध समीकरण है

(a) $V = \dfrac{\pi p r^4}{8\eta l}$ (b) $V = \dfrac{\pi \eta l}{8 p r^4}$ (c) $V = \dfrac{8 p \eta l}{\pi r^4}$ (d) $V = \dfrac{\pi p \eta}{8 l r^4}$

Solution : (a) दिया है V = प्रवाह की दर $= \dfrac{\text{आयतन}}{\text{सैकण्ड}} = [L^3T^{-1}]$, P = दाब = $[ML^{-1}T^{-2}]$, r = त्रिज्या = $[L]$

η = श्यानतागुणांक = $[ML^{-1}T^{-1}]$, l = लम्बाई = $[L]$

प्रत्येक राशि की विमाएँ उपरोक्त समीकरणों में रखने पर समीकरण $V = \dfrac{\pi P r^4}{8\eta l}$ की सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

$\therefore\ [L^3T^{-1}] = \dfrac{[ML^{-1}T^{-2}][L^4]}{[ML^{-1}T^{-1}][L]} = [L^3T^{-1}]$

L.H.S. = R.H.S. अर्थात् उपरोक्त सूत्र सत्य है।

Problem 36. समीकरण $S_t = u + \dfrac{1}{2}a(2t-1)$ है

(a) केवल आंकिक रूप से शुद्ध (b) केवल विमीय रूप से शुद्ध

(c) आंकिक तथा विमीय दोनों रूप से शुद्ध (d) न तो आंकिक रूप से तथा न ही विमीय रूप से

Solution : (c) दिया है S_t = t वें सैकण्ड में वस्तु द्वारा चली गई दूरी = $[LT^{-1}]$, a = त्वरण = $[LT^{-2}]$,

v = वेग = $[LT^{-1}]$, t = समय = $[T]$

प्रत्येक राशि के विमीय सूत्र को दिए गए समीकरण में रखने पर सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

$S_t = u + \dfrac{1}{2}a(2t-1)$

$\therefore\ [LT^{-1}] = [LT^{-1}] + [LT^{-2}]\,[T] \Rightarrow [LT^{-1}] = [LT^{-1}] + [LT^{-1}]$

चूँकि प्रत्येक पद की विमाएँ समान हैं। अतः यह समीकरण विमीय रूप से शुद्ध है तथा गति विज्ञान से इस समीकरण को व्युत्पन्न करने के बाद हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि यह समीकरण आंकिक रूप से भी शुद्ध है।

Problem 37. यदि वेग v, त्वरण A तथा बल F, मूलभूत राशि के रूप में चुनी जाये तो कोणीय संवेग का विमीय सूत्र v, A तथा F के पदों में होगा

(a) $FA^{-1}v$ (b) Fv^3A^{-2} (c) Fv^2A^{-1} (d) $F^2v^2A^{-1}$

Solution : (b) दिया है, v = वेग = $[LT^{-1}]$, A = त्वरण = $[LT^{-2}]$, F = बल = $[MLT^{-2}]$

प्रत्येक राशि की विमाएँ उपरोक्त सूत्र में रखने पर सूत्र की शुद्धता की जाँच कर सकते हैं

[कोणीय संवेग] = Fv^3A^{-2}

$[ML^2T^{-1}] = [MLT^{-2}]\,[LT^{-1}]^3[LT^{-2}]^{-2}$

$= [ML^2T^{-1}]$

L.H.S. = R.H.S. अर्थात् उपरोक्त सूत्र शुद्ध है।

Problem 38. अधिकतम द्रव्यमान (m) जिसे बहती नदी द्वारा गतिमान किया जा सकता है, वेग (v), पानी के घनत्व (ρ) तथा गुरुत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है तो सही सम्बन्ध होगा

(a) $m \propto \frac{\rho^2 v^4}{g^2}$ (b) $m \propto \frac{\rho v^6}{g^2}$ (c) $m \propto \frac{\rho v^4}{g^3}$ (d) $m \propto \frac{\rho v^6}{g^3}$

Solution : (d) दिया है, m = द्रव्यमान = $[M]$, v = वेग = $[LT^{-1}]$, ρ = घनत्व = $[ML^{-3}]$, g =गुरुत्वीय त्वरण = $[LT^{-2}]$

प्रत्येक राशि की विमाएँ उपरोक्त सूत्र में रखने पर सूत्र की शुद्धता की जाँच कर सकते हैं

$$m = K\frac{\rho v^6}{g^3}$$

$$\Rightarrow [M] = \frac{[ML^{-3}][LT^{-1}]^6}{[LT^{-2}]^3}$$

$$= [M]$$

L.H.S. = R.H.S. अर्थात् उपरोक्त सूत्र शुद्ध है।

(5) **नये सम्बन्धों की स्थापना करना** : यदि किसी भौतिक राशि की अन्य राशियों पर निर्भरता ज्ञात हो और यदि निर्भरता गुणनफल प्रकार की हो, तो विमीय विश्लेषण का उपयोग करके, राशियों के मध्य सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है।

उदाहरण : (i) सरल लोलक का आवर्तकाल

माना सरल लोलक का आवर्तकाल, गोलक के द्रव्यमान (m), प्रभावी लम्बाई (l), गुरूत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है

अर्थात् $T = Km^x l^y g^z$; जहाँ K = विमाहीन नियतांक

यदि उपरोक्त सम्बन्ध विमीय रूप से शुद्ध है तो राशियों की विमाएँ इस समीकरण में रखने पर –

$$[T] = [M]^x [L]^y [LT^{-2}]^z$$

या $[M^0L^0T^1] = [M^xL^{y+z}T^{-2z}]$

समान राशियों की घातों की तुलना करने पर $x = 0$, $y = 1/2$ तथा $z = -1/2$

अतः भौतिक सम्बन्ध $T = K\sqrt{\frac{l}{g}}$

विमाहीन नियतांक का मान प्रयोगों से (2π) पाया जाता है। अतः $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

(ii) स्टोक का नियम : जब एक छोटा गोला किसी तरल से कम चाल से गुजरता है तो श्यान बल F, गति का विरोध करता है, यह प्रायोगिक रूप से त्रिज्या r, गोले के वेग v तथा तरल की श्यानता η पर निर्भर करता है।

अतः $F = f(\eta, r, v)$

यदि फलन η, r तथा v के घात फलन का गुणनफल हो तो $F = K\eta^x r^y v^z$ .....(1) ; जहाँ K = विमाहीन नियतांक

यदि उपरोक्त सम्बन्ध विमीय रूप से शुद्ध है तो $[MLT^{-2}] = [ML^{-1}T^{-1}]^x [L]^y [LT^{-1}]^z$

या $[MLT^{-2}] = [M^x L^{-x+y+z} T^{-x-z}]$

समान राशियों की घातों की तुलना करने पर $x = 1;\ -x + y + z = 1$ तथा $-x - z = -2$

x, y और z, के लिए इन समीकरणों को हल करने पर $x = y = z = 1$

अतः समीकरण (i) से $F = K\eta rv$

प्रायोगिक आधार पर $K = 6\pi$, अतः $F = 6\pi\eta rv$

यही स्टोक का नियम है।

Problem 39. यदि प्रकाश के वेग (c), गुरुत्वीय नियतांक (G) तथा प्लांक नियतांक (h) का मूलभूत राशि माना जाये तो नयी पद्धति में द्रव्यमान की विमाएँ होंगी [UPSEAT 2002]

(a) $c^{1/2}G^{1/2}h^{1/2}$ (b) $c^{1/2}G^{1/2}h^{-1/2}$ (c) $c^{1/2}G^{-1/2}h^{1/2}$ (d) $c^{-1/2}G^{1/2}h^{1/2}$

Solution : (c) माना $m \propto c^xG^yh^z$ या $m = Kc^xG^yh^z$

दोनों ओर प्रत्येक राशि की विमाएँ रखने पर

$[M^1L^0T^0] = K[LT^{-1}]^x[M^{-1}L^3T^{-2}]^y[ML^2T^{-1}]^z = [M^{-y+z}L^{x+3y+2z}T^{-x-2y-z}]$

दोनों ओर से M, L तथा T की घातों की तुलना करने पर : $-y + z = 1$, $x + 3y + 2z = 0$, $-x - 2y - z = 0$

तीनों समीकरणों को हल करने पर $x = 1/2$, $y = -1/2$ तथा $z = 1/2$

$\therefore\ m \propto c^{1/2}G^{-1/2}h^{1/2}$

Problem 40. यदि किसी द्रव की बूँद के कम्पन का आवर्तकाल (T) पृष्ठ तनाव (S), बूँद की त्रिज्या (r) तथा द्रव के घनत्व (ρ) पर निर्भर करता है तो T का सही व्यंजक होगा [AMU (Med.) 2000]

(a) $T = K\sqrt{\rho r^3/S}$ (b) $T = K\sqrt{\rho^{1/2}r^3/S}$ (c) $T = K\sqrt{\rho r^3/S^{1/2}}$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (a) माना $T \propto S^xr^y\rho^z$ या $T = KS^xr^y\rho^z$

दोनों ओर प्रत्येक राशि की विमाएँ रखने पर

$[M^0L^0T^1] = K\ [MT^{-2}]^x[L]^y[ML^{-3}]^z = [M^{x+z}L^{y-3z}T^{-2x}]$

दोनों ओर से M, L तथा T की घातों की तुलना करने पर $x + z = 0$, $y - 3z = 0$, $-2x = 1$

इन समीकरणों को हल करने पर $x = -1/2$, $y = 3/2$, $z = 1/2$

अतः इसका आर्वतकाल, $T = KS^{-1/2}r^{3/2}\rho^{1/2} = K\sqrt{\frac{\rho r^3}{S}}$

Problem 41. यदि P विकरण दाब को, C प्रकाश की चाल को तथा Q प्रति सैकण्ड इकाई क्षेत्रफल पर गिरने वाली विकरण ऊर्जा को प्रदर्शित करते हैं तो अशून्यपूर्णांक x, y तथा z के मान क्या होगें ताकि $P^xQ^yC^z$ विमाहीन हो जाये

[AFMC 1991; CBSE 1992; CPMT 1981, 92; MP PMT 1992]

(a) $x = 1, y = 1, z = -1$ (b) $x = 1, y = -1, z = 1$ (c) $x = -1, y = 1, z = 1$ (d) $x = 1, y = 1, z = 1$

Solution : (b) $[P^xQ^yC^z] = [M^0L^0T^0]$

प्रत्येक राशि की विमाएँ रखने पर

$[ML^{-1}T^{-2}]^x[MT^{-3}]^y[LT^{-1}]^z = [M^{x+y}L^{-x+z}T^{-2x-3y-z}] = M^0L^0T^0$

दोनों ओर से M, L तथा T की घातों की तुलना करने पर: $x + y = 0$, $-x + z = 0$ तथा $-2x - 3y - z = 0$

नीचे दिये गये विकल्पों में से केवल विकल्प (b) उपरोक्त समीकरणों को सन्तुष्ट करता है अतः सही विकल्प (b) है।

$x = 1, y = -1, z = 1$

Problem 42. 't' सैकण्ड के दौरान एकसमान नली के किसी बिन्दु से गुजरने वाले पानी का आयतन V, नली के अनुप्रस्थकाट का क्षेत्रफल A तथा पानी का वेग u परस्पर इस प्रकार सम्बन्धित हैं $V \propto A^{\alpha} u^{\beta} t^{\gamma}$, तो निम्न में से कौनसा सम्बन्ध सत्य है

(a) $\alpha = \beta = \gamma$ (b) $\alpha \neq \beta = \gamma$ (c) $\alpha = \beta \neq \gamma$ (d) $\alpha \neq \beta \neq \gamma$

Solution : (b) दोनों ओर की विमाएँ लिखने पर, $[L^3] = [L^2]^{\alpha}[LT^{-1}]^{\beta}[T]^{\gamma} \Rightarrow [L^3T^0] = [L^{2\alpha+\beta}\, T^{\gamma-\beta}]$

दोनों ओर की घातों की तुलना करने पर, $2\alpha + \beta = 3$ और $\gamma - \beta = 0$

इन्हें हल करने पर $\beta = \gamma$ और $\alpha = \frac{1}{2}(3 - \beta)$ अर्थात् $\alpha \neq \beta = \gamma$

Problem 43. यदि वेग (V), बल (F) तथा ऊर्जा (E) को मूलभूत राशियाँ माना जाये तो द्रव्यमान का विमीय सूत्र होगा

(a) $V^{-2}F^0E$ (b) V^0FE^2 (c) $VF^{-2}E^0$ (d) $V^{-2}F^0E$

Solution : (d) माना $M = V^aF^bE^c$

दोनों ओर प्रत्येक राशि की विमाएँ रखने पर, $[M] = [LT^{-1}]^a[MLT^{-2}]^b[ML^2T^{-2}]^c$

समान राशियों की घातों की तुलना करने पर, $b + c = 1$, $a + b + 2c = 0$ तथा $-a - 2b - 2c = 0$

इन समीकरणों की तुलना करने पर $a = -2$, $b = 0$ तथा $c = 1$

अतः $M = [V^{-2}F^0E]$

Problem 44. दिया है प्रकीर्णित प्रकाश का आयाम (A)

(i) आपतित प्रकाश के आयाम (A_0) के अनुक्रमानुपाती होता है

(ii) प्रकीर्णित कण के आयतन (V) के अनुक्रमानुपाती होता है

(iii) प्रकीर्णित कण से दूरी (r) के व्युत्क्रमानुपाती होता है

(iv) प्रकीर्णित प्रकाश की तरंगदैर्ध्य (λ) पर निर्भर करता है तो सही सम्बन्ध होगा

(a) $A \propto \frac{1}{\lambda}$ (b) $A \propto \frac{1}{\lambda^2}$ (c) $A \propto \frac{1}{\lambda^3}$ (d) $A \propto \frac{1}{\lambda^4}$

Solution : (b) माना $A = \frac{KA_0V\lambda^x}{r}$

दोनों ओर प्रत्येक राशि की विमाएँ रखने पर

$$\Rightarrow [L] = \frac{[L].[L^3][L^x]}{[L]}$$

$\therefore [L] = [L^{3+x}]$; $\Rightarrow 3 + x = 1$ या $x = -2$

$\therefore A \propto \lambda^{-2}$

विमीय विश्लेषण की सीमाएँ

यद्यपि विमीय विश्लेषण बहुत उपयोगी है लेकिन इसकी भी कुछ सीमाएँ हैं

(1) यदि किसी भौतिक राशि की विमाएँ दी हैं, तो वह राशि अद्वितीय नहीं हो सकती क्योंकि कई भौतिक राशियों की विमाएँ समान होती हैं। उदाहरण के लिए, यदि किसी भौतिक राशि का विमीय सूत्र $[ML^2T^{-2}]$ है यह कार्य या ऊर्जा या बल आघूर्ण का विमीय सूत्र हो सकता है।

(2) आंकिक नियतांक $[K]$ जैसे (1/2), 1 या 2π आदि की कोई विमाएँ नहीं होती अतः इन्हें विमीय विश्लेषण विधि द्वारा ज्ञात नहीं किया जा सकता।

(3) विमीय विधि के द्वारा केवल गुणनफल से प्राप्त होने वाले फलन ही व्युत्पन्न किये जा सकते हैं। जैसे – $F = \frac{mv^2}{r}$ एवं $E = \frac{hc}{\lambda}$ ।

$s = ut + (1/2)at^2$ या $y = a\sin\omega t$ को इस विधि द्वारा व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता, परन्तु इन समीकरणों की शुद्धता की जाँच की जा सकती है।

(4) यदि यांत्रिकी में कोई भौतिक राशि तीन से अधिक राशियों पर निर्भर करती है तो विमीय विश्लेषण की विधि से सूत्र को व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता। फिर भी हम दिये गये समीकरण की शुद्धता की जाँच कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, $T = 2\pi\sqrt{1/mgl}$ विमीय विश्लेषण विधि व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता लेकिन इसकी विमीय रूप से शुद्धता की जाँच की जा सकती है।

(5) यदि कोई भौतिक राशि तीन भौतिक राशियों पर निर्भर करती है, और उनमें से दो की विमाएँ समान हों तो विमीय विश्लेषण विधि से इसके लिए सूत्र व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता। उदाहरण के लिए, स्वरित्र की आवृति के लिए सूत्र $f = (d/L^2)v$, विमीय विधि से व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता। परन्तु इसकी शुद्धता की जाँच की जा सकती है।

सार्थक अंक

किसी भौतिक राशि के मापन में सार्थक अंक उन अंकों की संख्या बताते हैं जिनमें हम पूर्ण आश्वस्त होते हैं। मापन में अधिक संख्या में सार्थक अंक प्राप्त होना, मापन में अधिक शुद्धता को दर्शाता है। इसका विलोम भी सत्य है।

दी गई राशि के मापन में सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करते समय निम्न नियमों को ध्यान में रखें

(1) सभी अशून्य अंक सार्थक होते हैं।

उदाहरण : 42.3 में तीन सार्थक अंक हैं।

243.4 में चार सार्थक अंक हैं।

24.123 में पाँच सार्थक अंक हैं।

(2) दो अशून्य अंकों के बीच शून्य अंक सार्थक अंक होते हैं।

उदाहरण : 5.03 में तीन सार्थक अंक हैं।

5.604 में चार सार्थक अंक हैं।

4.004 में चार सार्थक अंक हैं।

(3) संख्या के बांयीं ओर के शून्य कभी सार्थक अंक नहीं होते।

उदाहरण : 0.543 में तीन सार्थक अंक होगें।

0.045 में दो सार्थक अंक हैं।

0.006 में एक सार्थक अंक है।

(4) संख्या के दांयीं ओर के शून्य सार्थक अंक होते हैं।

उदाहरण : 4.330 में चार सार्थक अंक होगें।

433.00 में पाँच सार्थक अंक हैं।

343.000 में छः सार्थक अंक हैं।

(5) चरघातांकी निरूपण में, दी गई सख्या का आंकिक भाग ही सार्थक अंक बताता है।

उदाहरण : 1.32×10^{-2} में तीन सार्थक अंक हैं।

1.32×10^{4} में तीन सार्थक अंक हैं।

राशि को निश्चित सार्थक अंकों में व्यक्त करना

किसी दी गई राशि को निश्चित सार्थक अंकों वाली राशि में व्यक्त करने के लिए निम्नलिखित बातों का ध्यान रखते हैं

(1) यदि निश्चित सार्थक अंकों के बाद छोड़ी जाने वाली संख्या 5 से कम होती है तो उसके पूर्व की संख्या को अपरिवर्तित रहने देते हैं।

उदाहरण : $x = 7.82$ को दो सार्थक अंकों में $x = 7.8$ लिख सकते हैं इसी प्रकार $x = 3.94$ को दो सार्थक अंकों में $x = 3.9$ लिखा जा सकता है।

(2) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 से अधिक होती है तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते हैं।

उदाहरण : $x = 6.87$ को दो सार्थक अंकों में $x = 6.9$ लिख सकते हैं इसी प्रकार $x = 12.78$ को $x = 12.8$ लिखा जा सकता है।

(3) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तो उसके बाद कोई अशून्य संख्या आती है तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते हैं।

उदाहरण : $x = 16.351$ को दो सार्थक अंकों में $x = 16.4$ लिख सकते हैं इसी प्रकार $x = 6.758$ को $x = 6.8$ लिखा जा सकता है।

(4) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तथा उसके बाद कोई शून्य आता है तो उसके पूर्व की संख्या को अपरिवर्तित रहने देते हैं यदि यह सम संख्या है

उदाहरण : $x = 3.250$ को दो सार्थक अंकों में $x = 3.2$ लिख सकते हैं इसी प्रकार $x = 12.650$ को 12.6 लिखा जा सकता है।

(5) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तथा उसके बाद कोई शून्य आता है तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते हैं यदि यह विषम संख्या है

उदाहरण : $x = 3.750$ को दो सार्थक अंकों में $x = 3.8$ लिख सकते हैं इसी प्रकार $x = 16.150$ को $x = 16.2$ लिखा जा सकता है।

गणना में सार्थक अंक

बहुत से प्रयोगों में अंतिम परिणाम प्राप्त करने के लिए विभिन्न प्रेक्षणों का आपस में जोड़, घटाव, गुणा अथवा भाग करना पड़ता है और चूँकि प्रत्येक प्रेक्षण की शुद्धता का स्तर समान नहीं होता। अतः परिणाम की शुद्धता के बारे में कहा जा सकता है कि यह सबसे कम शुद्ध प्रेक्षण से ज्यादा नहीं हो सकती।

अतः किसी भी गणना में सही सार्थक अंक प्राप्त करने के लिए निम्न नियम ध्यान में रखने चाहिए।

(1) राशियों को जोड़ने अथवा घटाने से पहले दशमलव के बाद कुल उतने ही सार्थक अंक होने चाहिए जितने कि जोड़ने अथवा घटाने वाली किसी राशि में दशमलव के बाद कम से कम सार्थक अंक होते हैं।

(i)

33.3	33.3	← (केवल एक दशमलव स्थान रखता है)
3.11	3.1	
+ 0.313	0.3	
36.723	= 36.7 ←	)

उत्तर = 36.7

(ii) 3.1421

0.241

$+\ 0.09$ ← (2 दशमलव स्थान रखता है)

3.4731 ← (उत्तर भी 2 दशमलव स्थान तक लिखा जाना चाहिए)

उत्तर = 3.47

(iii) 62.831 ← (3 दशमलव स्थान रखता है)

$-\ 24.5492$

38.2818 ← (उत्तर 3 दशमलव स्थान तक लिखा जाना चाहिए)

उत्तर = 38.282

(2) किसी मापी गई राशि को किसी भी स्थिरांक से गुणा करने पर गुणनफल में वे सभी सार्थक अंक होते हैं जो कि साधारण रूप से गुणा करने पर मिलते हैं। लेकिन दो मापी गई राशियों के गुणनफल या भागफल में कुल उतने ही सार्थक अंक होते हैं जितने कि कम से कम किसी दी गई राशि में हैं।

(i) 142.06

$\times\ 0.23$ ← (दो सार्थक अंक)

32.6738 ← (उत्तर में दो सार्थक अंक होना चाहिए)

उत्तर = 33

(ii) 51.028

$\times\ 1.31$ ← (तीन सार्थक अंक)

66.84668

उत्तर = 66.8

(iii) $\frac{0.90}{4.26} = 0.2112676$

उत्तर = 0.21

परिमाण की कोटि

विज्ञान में संख्याओं को $M \times 10^x$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। जहाँ M 1 व 10 के बीच संख्या है तथा x पूर्णांक है। राशि के परिमाण की कोटि 10 की घात के रूप में होगी। यह घात ज्ञात करने के लिए राशि के मान को संक्षिप्त करना पढ़ेगा। संक्षिप्तकरण (Rounding off) करते समय हम अंतिम अंक जो 5 से कम है को छोड़ देते हैं। यदि अंतिम अंक 5 या 5 से अधिक हो तो उसके पूर्व अंक 1 से बढ़ा देते हैं। उदाहरण के लिए,

(1) निर्वात में प्रकाश का वेग $= 3 \times 10^8 ms^{-1} \approx 10^8 m/s$ (चूंकि 3 < 5)

(2) इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.1 \times 10^{-31} kg \approx 10^{-30} kg$ (चूंकि 9.1 > 5)

Problem 45. घन की प्रत्येक भुजा का मापन 7.203 m है। तो घन का आयतन उचित सार्थक अंक तक होगा

(a) 373.714 (b) 373.71 (c) 373.7 (d) 373

Solution : (c) आयतन $= a^3 = (7.203)^3 = 373.715\, m^3$

सार्थक अंकों में घन का आयतन $373.7\, m^3$ होगा क्योंकि इसकी भुजा के मापन में चार सार्थक अंक हैं।

Problem 46. 0.007 m^3 में सार्थक अंक हैं

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Solution : (a)

Problem 47. किसी गुटके की लम्बाई, चौड़ाई तथा मोटाई क्रमशः 125.5 *cm*, 5.0 *cm* और 0.32 *cm* हैं निम्न में से कौन अधिक शुद्ध है

(a) लम्बाई (b) चौड़ाई (c) मोटाई (d) ऊचाई

Solution : (a) लम्बाई के मापन में आपेक्षित त्रुटि न्यूनतम है। अतः यह मापन अधिक शुद्ध है।

Problem 48. एक बक्से का द्रव्यमान 2.3 *kg* , दो संगमरमर के द्रव्यमान 2.15 *g* तथा 12.39 *g* इसमें जोड़ना है। बक्से का कुल द्रव्यमान सार्थक अंकों में होगा

(a) 2.340 *kg* (b) 2.3145 *kg*. (c) 2.3 *kg* (d) 2.31 *kg*

Solution : (c) कुल द्रव्यमान $= 2.3 + 0.00215 + 0.01239 = 2.31\,kg$, परन्तु दो सार्थक अंकों में व्यक्त करने पर द्रव्यमान $= 2.31\,kg$

Problem 49. एक आयताकार चादर की लम्बाई 1.5 *cm* तथा चौड़ाई 1.203 *cm* है। आयताकार चादर की फलक का क्षेत्रफल सही सार्थक अकों तक होगा

(a) $1.8045\ cm^2$ (b) $1.804\,cm^2$ (c) $1.805\,cm^2$ (d) $1.8\ cm^2$

Solution : (d) क्षेत्रफल $= 1.5 \times 1.203 = 1.8045\,cm^2 = 1.8\,cm^2$

Problem 50. किसी घन की प्रत्येक भुजा 5.402 cm है, घन का सम्पूर्ण पृष्ठ तथा आयतन उचित सार्थक अंकों तक होगा

(a) $175.1\,cm^2$, $157\ cm^2$ (b) $175.1\ cm^2$, $157.6\,cm^3$

(c) $175\ cm^2$, $157\ cm^2$ (d) $175.08\,cm^2$, $157.639\ cm^3$

Solution : (b) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6 \times (5.402)^2 = 175.09\,cm^2 = 175.1\,cm^2$

कुल आयतन $= (5.402)^3 = 175.64\,cm^3 = 175.6\,cm^3$

Problem 51. 9.99 *m* + 0.0099 *m* का मान सही सार्थक अंकों की संख्या में होगा

(a) 10.00 *m* (b) 10 *m* (c) 9.9999 *m* (d) 10.0 *m*

Solution : (a) $9.99\,m + 0.0099\,m = 10.00\,m$

Problem 52. गुणनफल 3.124 × 4.576 का मान तीन सार्थक अंकों में होगा

(a) 14.295 (b) 14.3 (c) 14.295424 (d) 14.305

Solution : (b) $3.124 \times 4.576 = 14.295 = 14.3$ (तीन सार्थक अंकों तक)

Problem 53. $11.118 \times 10^{-6}\,V$ में सार्थक अंकों की संख्या है

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Solution : (c) सार्थक अंकों की संख्या 5 है चूंकि 10^{-6} इस संख्या को प्रभावित नहीं करता।

Problem 54. यदि प्रतिरोध का मान 10.845 ओहम् है तथा धारा का मान 3.23 ऐम्पियर है, विभवान्तर 35.02935 वोल्ट है तो इसका मान सार्थक अंकों में होगा [CPMT 1979]

(a) 35 *V* (b) 35.0 *V* (c) 35.03 *V* (d) 35.025 *V*

Solution : (b) धारा (3.23 *A*) के मान में न्यूनतम सार्थक अंक (3) है। अतः विभवान्तर $V(= IR)$ के मान में केवल 3 सार्थक अंक होगें। अतः इसका मान 35.0 *V* होगा।

मापन में त्रुटियाँ

मापन प्रक्रिया आवश्यक रूप से तुलनात्मक प्रक्रिया है। हमारी बहुत कोशिशों के वावजूद किसी राशि का मापा गया मान, वास्तविक मान या सत्यमान से कुछ न कुछ भिन्न प्राप्त होता है। वास्तविक मान से यह अन्तर ही मापन में त्रुटि कहलाता है।

(1) **निरपेक्ष त्रुटि :** भौतिक राशि के मापन में निरपेक्ष त्रुटि, भौतिक राशि के वास्तविक मान तथा मापे गये मान के परिमाणों के अन्तर के बराबर होती है।

माना एक भौतिक राशि n बार मापी गई तथा इसके मापे गये मान $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ हैं। तो इन मानों का समान्तर माध्य $a_m = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}$

सामान्यतः, a_m राशि का वास्तविक मान मानते हैं।

परिभाषा से मापे गये मानों में निरपेक्ष त्रुटि निम्न होगी –

$\Delta a_1 = a_m - a_1$ = प्रथम प्रेक्षण में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta a_2 = a_m - a_2$ = द्वितीय प्रेक्षण में निरपेक्ष त्रुटि

………… = ………………

$\Delta a_n = a_m - a_n$ = n वें प्रेक्षण में निरपेक्ष त्रुटि

निरपेक्ष त्रुटि किसी स्थिति में धनात्मक तथा अन्य स्थिति में ऋणात्मक हो सकती हैं।

(2) **माध्य निरपेक्ष त्रुटि :** यह मापी गई राशि में निरपेक्ष त्रुटियों के परिमाणों का समान्तर माध्य होती है। यह $\overline{\Delta a}$ से प्रदर्शित की जाती है। अतः

$$\overline{\Delta a} = \frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \ldots |\Delta a_n|}{n}$$

अतः अंतिम परिणाम निम्न प्रकार लिखा जा सकता है $a = a_m \pm \overline{\Delta a}$

इससे यह प्रदर्शित होता है कि किसी भी राशि का मापन $(a_m + \overline{\Delta a})$ तथा $(a_m - \overline{\Delta a})$ के बीच होता है।

(3) **आपेक्षिक त्रुटि या भिन्नात्मक त्रुटि :** आपेक्षिक त्रुटि या भिन्नात्मक त्रुटि, माध्य निरपेक्ष त्रुटि तथा मापी गई राशि के माध्य मान का अनुपात होती है। अतः

$$\text{आपेक्षिक त्रुटि या भिन्नात्मक त्रुटि} = \frac{\text{माध्य निरपेक्ष त्रुटि}}{\text{माध्य मान}} = \frac{\overline{\Delta a}}{a_m}$$

(4) **प्रतिशत त्रुटि :** जब आपेक्षिक या भिन्नात्मक त्रुटि को प्रतिशत में व्यक्त किया जाये तो यह प्रतिशत त्रुटि कहलाती है। अतः

$$\text{प्रतिशत त्रुटि} = \frac{\overline{\Delta a}}{a_m} \times 100\%$$

त्रुटियों का संयोजन

(1) **राशियों के योग में त्रुटि :** माना $x = a + b$

माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ अर्थात् a व b का योग की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि $\Delta x = \pm(\Delta a + \Delta b)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि $x = \dfrac{(\Delta a + \Delta b)}{a + b} \times 100\%$

(2) **राशियों के अन्तर में त्रुटि :** माना $x = a - b$

माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि,

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ अर्थात् a व b के अन्तर की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि $\Delta x = \pm(\Delta a + \Delta b)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि $x = \dfrac{(\Delta a + \Delta b)}{a - b} \times 100\%$

(3) राशियों के गुणनफल में त्रुटि : माना $x = a \times b$

माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ अर्थात् a और b के गुणनफल के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

x के मापन में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि $\dfrac{\Delta x}{x} = \pm\left(\dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}\right)$

x के मापन में प्रतिशत त्रुटि = (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) + (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)

(4) राशियों के भाग में त्रुटि : माना $x = \dfrac{a}{b}$

माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ अर्थात् a तथा b के भाग की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि $\dfrac{\Delta x}{x} = \pm\left(\dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}\right)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि = (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) + (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)

(5) घातीय फलनों में त्रुटि : माना $x = \dfrac{a^n}{b^m}$

माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि $\dfrac{\Delta x}{x} = \pm\left(n\dfrac{\Delta a}{a} + m\dfrac{\Delta b}{b}\right)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि = n (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) + m (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)

❑ अधिकतम घात वाली राशियों को अधिक सावधानीपूर्वक मापा जाना चाहिए क्योंकि इनमें अधिकतम त्रुटि होती है।

Problem 55. एक भौतिक राशि a चार राशियों b, c, d तथा e से निम्न प्रकार सम्बन्धित हैं $a = b^{\alpha}c^{\beta}/d^{\gamma}e^{\delta}$, यदि b, c, d तथा e में अधिकतम त्रुटियाँ क्रमशः $b_1\%$, $c_1\%$, $d_1\%$ तथा $e_1\%$, हैं तो प्रयोग द्वारा a के मापन में अधिकतम त्रुटि होगी

[CPMT 1981]

(a) $(b_1 + c_1 + d_1 + e_1)\%$ (b) $(b_1 + c_1 - d_1 - e_1)\%$

(c) $(\alpha b_1 + \beta c_1 - \gamma d_1 - \delta e_1)\%$ (d) $(\alpha b_1 + \beta c_1 + \gamma d_1 + \delta e_1)\%$

Solution : (d) $a = b^{\alpha}\, c^{\beta} / d^{\gamma}\, e^{\delta}$

अतः a में अधिकतम त्रुटि होगी

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\times 100\right)_{max} = \alpha.\frac{\Delta b}{b}\times 100 + \beta.\frac{\Delta c}{c}\times 100 + \gamma.\frac{\Delta d}{d}\times 100 + \delta.\frac{\Delta e}{e}\times 100$$

$$= (\alpha b_1 + \beta c_1 + \gamma d_1 + \delta e_1)\%$$

Problem 56. किसी वर्गाकार प्लेट पर दाब, प्लेट पर बल तथा प्लेट की भुजा की लम्बाई माप कर, मापा जाता है। यदि बल तथा लम्बाई के मापन में अधिकतम त्रुटि क्रमशः 4% तथा 2% हो तो दाब के मापन में अधिकतम त्रुटि होगी

(a) 1% (b) 2% (c) 6% (d) 8%

Solution : (d) $P = \frac{F}{A} = \frac{F}{l^2}$ अतः दाब में अधिकतम त्रुटि =

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\times 100\right)_{max} = \frac{\Delta F}{F}\times 100 + 2\frac{\Delta l}{l}\times 100 = 4\% + 2 \times 2\% = 8\%$$

Problem 57. किसी वस्तु के पदार्थ का आपेक्षिक घनत्व पहले वायु में फिर पानी में तोल कर मापा गया। यदि वायु में भार (5.00 ± 0.05) न्यूटन तथा पानी में भार (4.00 ± 0.05) न्यूटन है तो आपेक्षिक घनत्व, अधिकतम प्रतिशत त्रुटि के साथ होगा

(a) 5.0 ± 11% (b) 5.0 ± 1% (c) 5.0 ± 6% (d) 1.25 ± 5%

Solution : (a) वायु में भार $= (5.00 \pm 0.05)$ न्यूटन

पानी में भार $= (4.00 \pm 0.05)$ न्यूटन

पानी में भार में कमी $= (1.00 \pm 0.1)$ न्यूटन

अतः आपेक्षिक घनत्व $= \dfrac{\text{वायु में भार}}{\text{पानी में भार में कमी}}$ अर्थात् $R.D = \dfrac{5.00 \pm 0.05}{1.00 \pm 0.1}$

अब अधिकतम सम्भव त्रुटि के साथ आपेक्षिक घनत्व $= \frac{5.00}{1.00} \pm \left(\frac{0.05}{5.00} + \frac{0.1}{1.00}\right)\times 100 = 5.0 \pm (1+10)\%$

$= 5.0 \pm 11\%$

Problem 58. प्रतिरोध $R = \frac{V}{i}$ जहाँ $V = 100 \pm 5$ वोल्ट तथा $i = 10 \pm 0.2$ ऐम्पियर तो R में कुल त्रुटि होगी

(a) 5% (b) 7% (c) 5.2% (d) $\frac{5}{2}\%$

Solution : (b) $R = \frac{V}{I}$ $\therefore \left(\frac{\Delta R}{R}\times 100\right)_{max} = \frac{\Delta V}{V}\times 100 + \frac{\Delta I}{I}\times 100 = \frac{5}{100}\times 100 + \frac{0.2}{10}\times 100 = (5+2)\% = 7\%$

Problem 59. किसी प्रयोग में सरल लोलक का आवर्तकाल क्रमशः 2.63 *s*, 2.56 *s*, 2.42 *s*, 2.71 *s* तथा 2.80 *s* मापा गया तो माध्य निरपेक्ष त्रुटि होगी

(a) 0.1 *s* (b) 0.11 *s* (c) 0.01 *s* (d) 1.0 *s*

Solution : (b) माध्य मान $= \dfrac{2.63 + 2.56 + 2.42 + 2.71 + 2.80}{5} = 2.62\,sec$

अब $|\Delta T_1| = 2.63 - 2.62 = 0.01$

$|\Delta T_2| = 2.62 - 2.56 = 0.06$

$|\Delta T_3| = 2.62 - 2.42 = 0.20$

$|\Delta T_4| = 2.71 - 2.62 = 0.09$

$|\Delta T_5| = 2.80 - 2.62 = 0.18$

माध्य निरपेक्ष त्रुटि $\Delta T = \frac{|\Delta T_1| + |\Delta T_2| + |\Delta T_3| + |\Delta T_4| + |\Delta T_5|}{5} = \frac{0.54}{5} = 0.108 = 0.11 sec$

Problem 60. एक बेलन की लम्बाई 0.1 *cm* अल्पतमांक की मीटर छड़ से मापी जाती है। इसका व्यास 0.01 *cm* अल्पतमांक के वर्नियर कैलीपर्स से मापा जाता है। यदि बेलन की लम्बाई 5.0 *cm* तथा त्रिज्या 2.0 *cm* हो तो इसके आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि होगी

(a) 1% (b) 2% (c) 3% (d) 4%

Solution : (c) बेलन का आयतन $V = \pi r^2 l$

आयतन में प्रतिशत त्रुटि $\frac{\Delta V}{V} \times 100 = \frac{2\Delta r}{r} \times 100 + \frac{\Delta l}{l} \times 100$

$$= \left(2 \times \frac{0.01}{2.0} \times 100 + \frac{0.1}{5.0} \times 100\right) = (1+2)\% = 3\%$$

Problem 61. एक प्रयोग में निम्न प्रेक्षण लिए गये: $L = 2.820\ m$, $M = 3.00\ kg$, $l = 0.087\ cm$, $D = 0.041\ cm$, $g = 9.81\ m/s^2$ सूत्र, $Y = \frac{4Mg}{\pi D^2 l}$ उपयोग करते हुए Y में अधिकतम प्रतिशत त्रुटि होगी

(a) 7.96% (b) 4.56% (c) 6.50% (d) 8.42%

Solution : (c) $Y = \frac{4MgL}{\pi D^2 l}$ अत: Y में अधिकतम सम्भव त्रुटि $= \frac{\Delta Y}{Y} \times 100 = \left(\frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta l}{l}\right) \times 100$

$$= \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{9.81} + \frac{1}{2.820} + 2 \times \frac{1}{41} + \frac{1}{87}\right) \times 100$$

$= 0.065 \times 100 = 6.5\%$

Problem 62. ऊष्मा के जूल नियम के अनुसार उत्पन्न ऊष्मा $H = I^2 Rt$ जहाँ I धारा, R प्रतिरोध तथा t समय है। यदि I, R तथा t के मापन में त्रुटियाँ क्रमशः 3%, 4% तथा 6% हैं तो H के मापन में त्रुटि है

(a) ± 17% (b) ± 16% (c) ± 19% (d) ± 25%

Solution : (b) $H = I^2 Rt$

$$\therefore \frac{\Delta H}{H} \times 100 = \left(\frac{2\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta t}{t}\right) \times 100 = (2 \times 3 + 4 + 6)\% = 16\%$$

Problem 63. किसी वस्तु के वेग के मापन में धनात्मक त्रुटि 50% है, तो गतिज ऊर्जा के मापन में त्रुटि होगी

(a) 25% (b) 50% (c) 100% (d) 125%

Solution : (c) गतिज ऊर्जा $E = \frac{1}{2} m v^2$

$$\therefore \frac{\Delta E}{E} \times 100 = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta v}{v}\right) \times 100$$

यहाँ $\Delta m = 0$ तथा $\frac{\Delta v}{v} \times 100 = 50\%$

$$\therefore \frac{\Delta E}{E} \times 100 = 2 \times 50 = 100\%$$

Problem 64. एक भौतिक राशि P निम्न सूत्र से दी जाती है $P=\frac{A^3B^{\frac{1}{2}}}{C^{-4}D^{\frac{3}{2}}}$ तो P में अधिकतम त्रुटि किस राशि के कारण आ सकती है

(a) A (b) B (c) C (d) D

Solution : (c) राशि C में अधिकतम घात है अतः P में इससे अधिकतम त्रुटि होगी।