Topperseducations.co.in

प्रस्तावना

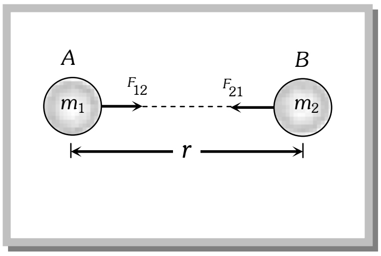
वर्ष 1665 की बात है, 23 वर्ष का एक युवक, फलों के बाग में बैठा था। उसने वृक्ष से एक सेब गिरते देखा और पृथ्वी के आकर्षण बल के प्रभाव में चन्द्रमा की गति व अन्य आकाशीय पिण्डों की गति के बारे में सोचने लगा। आप सभी जानते हैं, वह युवक न्यूटन था।

पृथ्वी द्वारा उत्पन्न गुरुत्वीय त्वरण व चन्द्रमा को पृथ्वी के चारों ओर अपनी कक्षा में गति कराने के लिए आवश्यक त्वरण की तुलना करके न्यूटन ने गुरुत्वाकर्षण का मूल नियम प्रतिपादित किया।

न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण नियम

न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियमानुसार, ब्रम्हाण्ड का प्रत्येक पिण्ड अन्य पिण्डों पर आकर्षण बल लगाता है। यह आकर्षण बल पिण्डों के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती व उनके केन्द्रों के मध्य की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होती है। इस बल की दिशा दोनों पिण्डों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होती है।

यदि m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो पिण्ड एक दूसरे से r दूरी पर स्थित हों तो पिण्डों के मध्य लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल F का परिमाण



$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

या $$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

सदिश रूप में : न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियमानुसार

$$\vec{F}_{12} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{21} = \frac{-Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}_{21} = \frac{-Gm_1m_2}{|\vec{r}_{21}|^3}\vec{r}_{21}$$

$\hat{r}_{12}$ = A से B की दिशा में एकांक सदिश

$\hat{r}_{21}$ = B से A की दिशा में एकांक सदिश,

$\vec{F}_{12}$ = पिण्ड B द्वारा पिण्ड A पर लगा गुरुत्वाकर्षण बल

$\vec{F}_{21}$ = पिण्ड A द्वारा पिण्ड B पर लगा गुरुत्वाकर्षण बल

जहाँ ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि $\vec{F}_{12}$ की दिशा, $\hat{r}_{21}$ की दिशा के विपरीत है।

इसी प्रकार $$\vec{F}_{21} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12} = \frac{-Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}_{12} = \frac{-Gm_1m_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12}$$

$$= \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{21} \qquad [\because \hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}]$$

अतः स्पष्ट है कि $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ जो कि न्यूटन का गति विषयक तृतीय नियम है।

यहाँ G समानुपाती नियतांक है, जिसे सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक कहते हैं।

यदि $m_1 = m_2 = 1$ इकाई व $r = 1$ इकाई तब $G = F$

अर्थात् सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक संख्यात्मक रूप से, दो एकांक द्रव्यमान के पिण्डों, जिनके केन्द्र एक दूसरे से एकांक दूरी पर स्थित हैं, के मध्य लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल के तुल्य होता है।

Important points

(i) प्रयोगशाला में G के मान की गणना सर्वप्रथम कवेन्डिश (Cavendish) ने की थी।

(ii) S.I. पद्धति में G का मान $6.67 \times 10^{-11}\ N\text{–}m^2\ kg^{-2}$ व C.G.S. पद्धति में G का मान $6.67 \times 10^{-8}\ dyne\text{-}cm^2\text{-}g^{-2}$ होता है।

(iii) विमीय सूत्र : $[M^{-1}L^3T^{-2}]$

(iv) G का मान पिण्डों की प्रकृति व आकार पर निर्भर नहीं करता है।

(v) G का मान पिण्डों के मध्य उपस्थित माध्यम पर भी निर्भर नहीं करता।

(vi) चूँकि G का मान अत्यन्त सूक्ष्म होता है। अतः गुरुत्वाकर्षण बल दुर्बल प्रकृति का बल है।

गुरुत्वाकर्षण बल की विशेषताऐं

Topperseducations.co.in

(1) यह सदैव आकर्षण प्रकृति का होता है जबकि वैद्युत व चुम्बकीय बलों की प्रकृति आकर्षण व प्रतिकर्षण हो सकती है।

(2) यह पिण्डों के मध्य उपस्थित माध्यम पर निर्भर नहीं करता जबकि वैद्युत व चुम्बकीय बल माध्यम की प्रकृति पर निर्भर करते हैं।

(3) यह दूरी की एक बड़ी परास के लिए सत्य है अर्थात् यह अर्न्तग्रहीय से अन्तराण्विक दूरियों तक कार्य करता है।

(4) यह एक केन्द्रीय बल है अर्थात् पिण्डों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश कार्य करता है।

(5) यह दो पिण्डों के मध्य लगने वाला अन्योन्य बल है अर्थात् दो पिण्डों के मध्य लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल पर किसी अन्य पिण्ड की उपस्थिति का प्रभाव नहीं पड़ता। अतः अध्यारोपण के सिद्धांत से, कई पिण्डों द्वारा किसी पिण्ड पर लगने वाला परिणामी बल, पृथक-पृथक पिण्डों द्वारा लगने वाले बलों का सदिश योग होता है। अर्थात् $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...$

जबकि नाभिकीय बल कई पिण्डों के मध्य लगने वाला अन्योन्य बल है।

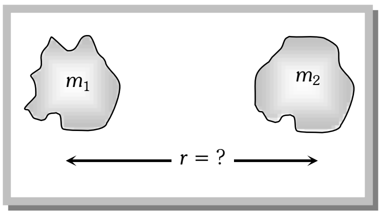
(6) यह दुर्बल प्रकृति का बल है। $F_{\text{नाभिकीय}} > F_{\text{वैद्युत चुबंकीय}} > F_{\text{गुरुत्वाकर्षण}}$

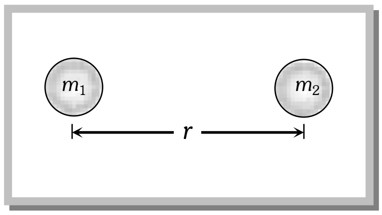
(7) दो इलेक्ट्रॉनों के मध्य लगने वाले गुरुत्वाकर्षण व वैद्युत आकर्षण बल का अनुपात 10^{-43} कोटि का होता है।

(8) यह एक संरक्षी बल है अर्थात् इसके द्वारा किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता।

(9) यह क्रिया-प्रतिक्रिया के युग्म में होता है, अर्थात् एक पिण्ड दूसरे पिण्ड पर जितना बल आरोपित करता है, दूसरा पिण्ड भी पहले पिण्ड पर उतना ही बल आरोपित करता है।

❑ गुरुत्वाकर्षण नियम दो बिन्दु द्रव्यमानों के लिए दिया गया है। दो स्वैच्छिक आकार के पिण्ड के मध्य अद्वितीय विभाजन (दूरी) नहीं होता अतः गुरुत्वाकर्षण नियम आरोपित नहीं किया जा सकता।





परन्तु यदि दो पिण्ड एक समान गोले हैं तो उनके मध्य दूरी उनके केन्द्रों से ली जा सकती है क्योंकि एकसमान द्रव्यमान वितरण का गोला अपने से बाहर स्थित किसी बिन्दु के लिए बिन्दु द्रव्यमान की भाँति व्यवहार करता है।

Problem 1. दो पिण्डों के मध्य लगने वाला बल निर्भर नहीं करता [RPET 2003]

(a) द्रव्यमानों के योग पर (b) द्रव्यमानों के गुणनफल

(c) सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक G पर (d) द्रव्यमानों के मध्य दूरी पर

Solution : (a) $F = G \times \frac{\text{द्रव्यमानों का गुणन}}{(\text{द्रव्यमानों के मध्य दूरी})^2}$

Problem 2. द्रव्यमान M दो भागों xM व $(1 - x)M$ में विभाजित किया जाता है। किसी दी गयी दूरी के लिए, x का वह मान जिसके लिए दो भागों के मध्य लगने वाला बल अधिकतम होगा [EAMCET 2001]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) 1 (d) 2

Solution : (a) गुरुत्वाकर्षण बल $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{GxM(1-x)M}{r^2} = \frac{GM^2}{r^2}x(1-x)$

बल के अधिकतम मान के लिए $\frac{dF}{dx} = 0 \therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{GM^2x}{r^2}(1-x)\right] = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x - x^2) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$

Problem 3. यदि चन्द्रमा का द्रव्यमान, पृथ्वी के द्रव्यमान का 1.2% हो तो चन्द्रमा द्वारा पृथ्वी पर आरोपित बल व पृथ्वी द्वारा चन्द्रमा पर आरोपित बल से तुलनात्मक रूप से होगा [SCRA 1998]

(a) समान (b) छोटा (c) बड़ा (d) चन्द्रमा की कला पर निर्भर

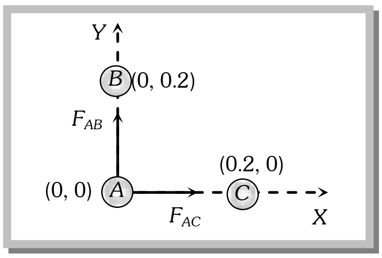
Solution : (a) पृथ्वी व चन्द्रमा दोनों एक दूसरे पर समान बल आरोपित करते हैं।

Problem 4. तीन एकसमान बिन्दु द्रव्यमान (प्रत्येक $1 kg$) x-y तल में बिन्दुओं (0, 0), (0, 0.2m) व (0.2m, 0) पर स्थित हैं। मूल बिन्दु पर स्थित द्रव्यमान पर कुल गुरुत्वाकर्षण बल का मान होगा

(a) $1.67 \times 10^{-9}(\hat{i} + \hat{j})N$ (b) $3.34 \times 10^{-10}(\hat{i} + \hat{j})N$

(c) $1.67 \times 10^{-9}(\hat{i} - \hat{j})N$ (d) $3.34 \times 10^{-10}(\hat{i} + \hat{j})N$

Solution : (a) माना A मूलबिन्दु पर तथा B व C क्रमशः x व y-अक्ष पर स्थित हैं



$\vec{F}_{AC} = \frac{Gm_Am_C}{r_{AC}^2}\hat{i} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1 \times 1}{(0.2)^2}\hat{i} = 1.67 \times 10^{-9}\,\hat{i}\,N$

इसी प्रकार $\vec{F}_{AB} = 1.67 \times 10^{-9}\,\hat{j}\,N$

$\therefore$ A पर कुल बल $\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AB} = 1.67 \times 10^{-9}(\hat{i} + \hat{j})\,N$

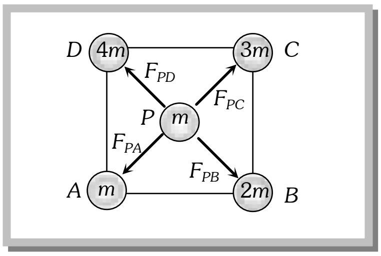
Problem 5. m, $2m$, $3m$ व $4m$ द्रव्यमान के चार कण a भुजा वाले वर्ग के शीर्षों पर रखे गये हैं। तो वर्ग के केन्द्र पर रखे m द्रव्यमान वाले कण पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल होगा

(a) $\frac{24m^2G}{a^2}$ (b) $\frac{6m^2G}{a^2}$ (c) $\frac{4\sqrt{2}Gm^2}{a^2}$ (d) शून्य

Solution : (c) यदि m द्रव्यमान के दो कण एक दूसरे से x दूरी पर हों तो उनके मध्य गुरुत्वाकर्षण बल $\frac{Gmm}{x^2} = F$ (माना)

प्रश्नानुसार m द्रव्यमान का कण केन्द्र (P) पर स्थित है, जो चार बलों का अनुभव करेगा।

F_{PA} = बिन्दु P पर A के कारण बल $= \dfrac{Gmm}{x^2} = F$



इसी प्रकार $F_{PB} = \dfrac{G2mm}{x^2} = 2F$, $F_{PC} = \dfrac{G3mm}{x^2} = 3F$ तथा $F_{PD} = \dfrac{G4mm}{x^2} = 4F$

अतः P पर कुल बल $\vec{F}_{net} = \vec{F}_{PA} + \vec{F}_{PB} + \vec{F}_{PC} + \vec{F}_{PD} = 2\sqrt{2}F$

$\therefore \vec{F}_{net} = 2\sqrt{2}\dfrac{Gmm}{x^2} = 2\sqrt{2}\dfrac{Gm^2}{(a/\sqrt{2})^2}$ [$x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ = वर्ग के विकर्ण का आधा]

$$= \frac{4\sqrt{2}\,Gm^2}{a^2}$$

गुरुत्वीय त्वरण

पृथ्वी द्वारा किसी पिण्ड पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल गुरूत्व कहलाता है।

जब किसी वस्तु पर बल लगाया जाता है तो वह त्वरित होती है। अतः यदि कोई पिण्ड गुरूत्व के अधीन हो तो उसे भी त्वरित होना चाहिए।

अतः गुरुत्वाकर्षण बल के प्रभाव में पिण्ड की गति में उत्पन्न त्वरण, गुरुत्वीय त्वरण कहलाता है। इसे g से प्रदर्शित करते हैं।

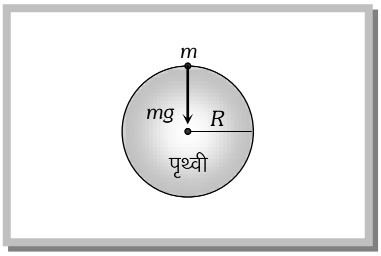
माना m द्रव्यमान की वस्तु पृथ्वी की सतह पर रखी है। तो उस पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = \frac{GMm}{R^2} \quad .....(i)$$

जहाँ M = पृथ्वी का द्रव्यमान तथा R = पृथ्वी की त्रिज्या

यदि g गुरुत्वीय त्वरण हो तो वस्तु पर पृथ्वी द्वारा लगने वाला बल

बल = द्रव्यमान × त्वरण



या $F = mg$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $mg = \dfrac{GMm}{R^2}$

$$\therefore \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad .....(iii)$$

$\Rightarrow g = \dfrac{G}{R^2}\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho\right)$ [द्रव्यमान (M) = आयतन $(\frac{4}{3}\pi R^3)$ × घनत्व (ρ)]

$$\therefore \quad g = \frac{4}{3}\pi\rho GR \quad .....(iv)$$

Important points

(i) व्यंजक $g = \dfrac{GM}{R^2} = \dfrac{4}{3}\pi\rho GR$ से स्पष्ट है कि g का मान ग्रह के द्रव्यमान, त्रिज्या व घनत्व पर निर्भर करता है, ग्रह की सतह पर रखी वस्तु के द्रव्यमान, त्रिज्या व घनत्व पर नहीं अर्थात् कोई ग्रह हल्की व भारी वस्तु में समान त्वरण उत्पन्न करता है।

(ii) किसी ग्रह के लिए (M/R^2) या ρR, का मान अधिक होने पर g का मान भी अधिक होगा।

(iii) गुरुत्वीय त्वरण एक सदिश राशि है इसकी दिशा सदैव ग्रह के केन्द्र की ओर होती है।

(iv) g का विमीय सूत्र : $[M^o LT^{-2}]$

(v) पृथ्वी की सतह पर g का औसत मान 9.8 m/s^2 या 981 cm/sec^2 या 32 $feet/sec^2$ होता है।

(vi) गुरुत्वीय त्वरण का मान निम्न कारकों के कारण परिवर्तित होता है : (a) पृथ्वी का आकार (b) पिण्ड की पृथ्वी की सतह से ऊँचाई (c) पिण्ड की पृथ्वी की सतह से गहराई (d) पृथ्वी का अक्षीय घूर्णन।

Problem 6. चन्द्रमा की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी की सतह का 1/6 है। यदि पृथ्वी व चन्द्रमा के घनत्वों का अनुपात $\left(\frac{\rho_e}{\rho_m}\right) = \frac{5}{3}$ हो तो चन्द्रमा की त्रिज्या R_m पृथ्वी की त्रिज्या R_e के पदों में होगी [MP PMT 2003]

(a) $\frac{5}{18}R_e$ (b) $\frac{1}{6}R_e$ (c) $\frac{3}{18}R_e$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{3}}R_e$

Solution : (a) गुरुत्वीय त्वरण $g = \frac{4}{3}\pi\rho GR$ $\therefore$ $g \propto \rho R$ या $\frac{g_m}{g_e} = \frac{\rho_m}{\rho_e}.\frac{R_m}{R_e}$ [चूँकि $\frac{g_m}{g_e} = \frac{1}{6}$ तथा $\frac{\rho_e}{\rho_m} = \frac{5}{3}$ (दिया गया है)]

$\therefore \frac{R_m}{R_e} = \left(\frac{g_m}{g_e}\right)\left(\frac{\rho_e}{\rho_m}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{3}$ $\therefore R_m = \frac{5}{18}R_e$

Problem 7. दूर अंतरिक्ष में M_0 द्रव्यमान व D_0 व्यास का एक गोलाकार ग्रह स्थित है। m द्रव्यमान का एक कण ग्रह की सतह के निकट गिरता है तो उसके द्वारा अनुभव किया जाने वाले गुरुत्वीय त्वरण होगा [MP PMT 1987; DPMT 2002]

(a) GM_0 / D_0^2 (b) $4mGM_0 / D_0^2$ (c) $4GM_0 / D_0^2$ (d) GmM_0 / D_0^2

Solution : (c) हम जानते हैं कि $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{(D/2)^2} = \frac{4GM}{D^2}$

यदि ग्रह का द्रव्यमान $= M_0$ और ग्रह का व्यास $= D_0$ तब $g = \frac{4GM_0}{D_0^2}$.

Problem 8. पृथ्वी की तुलना में चन्द्रमा की त्रिज्या व द्रव्यमान क्रमशः 1/4 व 1/80 हैं। यदि g पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण हो तो चन्द्रमा की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण होगा [MP PMT 1997; RPET 2000; MP PET 2000, 2001]

(a) $\frac{g}{4}$ (b) $\frac{g}{5}$ (c) $\frac{g}{6}$ (d) $\frac{g}{8}$

Solution : (b) गुरुत्वीय त्वरण $g = \frac{GM}{R^2}$ $\therefore \frac{g_{moon}}{g_{earth}} = \frac{M_{moon}}{M_{earth}}.\frac{R^2_{earth}}{R^2_{moon}} = \left(\frac{1}{80}\right)\left(\frac{4}{1}\right)^2$

$g_{moon} = g_{earth} \times \frac{16}{80} = \frac{g}{5}$

Problem 9. यदि पृथ्वी की त्रिज्या 1% घट जाए परन्तु द्रव्यमान अपरिवर्तित रहे तो पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान [IIT-JEE 1981; CPMT 1981; MP PMT 1996, 97; Roorkee 1992; MP PET 1999]

(a) 2% घट जाएगा (b) अपरिवर्तित रहेगा (c) 2% बढ़ जाएगा (d) 1% बढ़ जाएगा

Solution : (c) हम जानते हैं कि $g \propto \frac{1}{R^2}$ [अर्थात् R घटने पर g बढ़ेगा]

अतः g में % परिवर्तन $= 2$ (R में % परिवर्तन) $= 2 \times 1\% = 2\%$

अतः गुरुत्वीय त्वरण 2% बढ़ जाएगा।

Problem 10. चन्द्रमा का द्रव्यमान $7.34 \times 10^{22} kg$ व उसकी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण $1.4 m/s^2$, हो तो चन्द्रमा की त्रिज्या होगी ($G = 6.667 \times 10^{-11} Nm^2 / kg^2$) [AFMC 1998]

(a) $0.56 \times 10^4 m$ (b) $1.87 \times 10^6 m$ (c) $1.92 \times 10^6 m$ (d) $1.01 \times 10^8 m$

Solution : (b) हम जानते हैं, $g = \frac{GM}{R^2}$ $\therefore R = \sqrt{\frac{GM}{g}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 7.34 \times 10^{22}}{1.4}} = 1.87 \times 10^6 m$

Problem 11. एक ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी का 1/10 व त्रिज्या पृथ्वी की 1/3 है। एक व्यक्ति पृथ्वी पर एक पत्थर उछालता है तो वह 90*m* की ऊँचाई तक जाता है। अगर वही पत्थर, व्यक्ति ग्रह पर फेंकें तो वह किस ऊँचाई तक जाएगा [RPMT 1994]

(a) 90*m* (b) 40*m* (c) 100*m* (d) 45*m*

Solution : (c) गुरुत्वीय त्वरण $g = \frac{GM}{R^2}$ $\therefore \frac{g_{ग्रह}}{g_{पृथ्वी}} = \frac{M_{ग्रह}}{M_{पृथ्वी}}\left(\frac{R_{पृथ्वी}}{R_{ग्रह}}\right)^2 = \frac{1}{10} \times \left(\frac{3}{1}\right)^2 = \frac{9}{10}$

यदि कोई पिण्ड किसी ग्रह की सतह पर u वेग से फेंका जाए तो अधिकतम ऊँचाई $H = \frac{u^2}{2g}$

$\frac{H_{ग्रह}}{H_{पृथ्वी}} = \frac{g_{पृथ्वी}}{g_{ग्रह}}$ $\Rightarrow H_{ग्रह} = \frac{10}{9} \times H_{पृथ्वी} = \frac{10}{9} \times 90 = 100$ *metre.*

Problem 12. दो ग्रहों की त्रिज्याऐं R_1 व R_2 हैं उनके घनत्व क्रमशः ρ_1 व ρ_2 हैं। उनकी सतहों पर गुरुत्वीय त्वरणों के मानों का अनुपात होगा [MP PET 1994]

(a) $g_1 : g_2 = \frac{\rho_1}{R_1^2} : \frac{\rho_2}{R_2^2}$ (b) $g_1 : g_2 = R_1 R_2 : \rho_1 \rho_2$

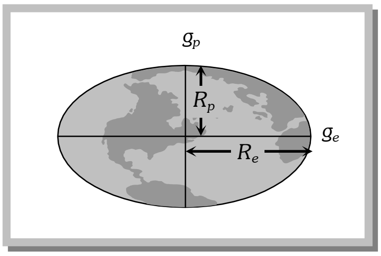
(c) $g_1 : g_2 = R_1 \rho_2 : R_2 \rho_1$ (d) $g_1 : g_2 = R_1 \rho_1 : R_2 \rho_2$

Solution : (d) गुरुत्वीय त्वरण $g = \frac{4}{3}\pi\rho G R$ $\therefore g_1 : g_2 = R_1 \rho_1 : R_2 \rho_2$

पृथ्वी के आकार के कारण g के मान में परिवर्तन

Topperseducations.co.in

पृथ्वी का आकार दीर्घवृत्ताकार है। यह ध्रुवों पर कुछ चपटी तथा भूमध्य रेखा पर कुछ उभरी हुई है। भूमध्य रेखीय त्रिज्या, ध्रुवीय त्रिज्या से लगभग 21 *km* अधिक है। सूत्र $g = \frac{GM}{R^2}$ से,



भूमध्य रेखा पर $g_e = \frac{GM}{R_e^2}$ ......(i)

ध्रुवों पर $g_p = \frac{GM}{R_p^2}$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $\frac{g_e}{g_p} = \frac{R_p^2}{R_e^2}$

चूँकि $R_{equator} > R_{pole}$ $\therefore g_{pole} > g_{equator}$ तथा $g_p = g_e + 0.018\ ms^{-2}$

अर्थात् भूमध्य रेखा से, ध्रुवों की ओर जाने पर g का मान अर्थात् वस्तु का भार बढ़ता है।

Problem 13. कमानीदार तुला (spring balance)से 1 *kg* शक्कर खरीदना कहाँ लाभदायक होगा [RPET 1996]

(a) ध्रुवों पर (b) भूमध्य रेखा पर (c) 45° अक्षांश पर (d) 40° अक्षांश पर

Solution : (b) भूमध्य रेखा पर g का मान न्यूनतम होता है, अतः वहाँ शक्कर खरीदना लाभदायक होगा।

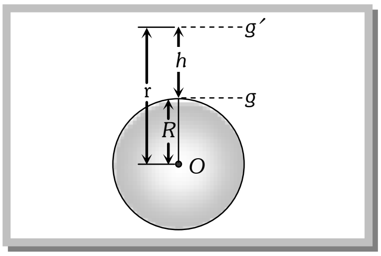
Problem 14. गुरुत्वीय बल न्यूनतम होगा [CPMT 1992]

(a) भूमध्य रेखा पर (b) ध्रुवों पर

(c) ध्रुव व भूमध्य रेखा के मध्य किसी बिन्दु पर (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (a)

ऊँचाई के साथ g के मान में परिवर्तन



पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad .....(i)$$

पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad .....(ii)$$

(i) व (ii) से,

$$g' = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \quad .....(iii)$$

$$= g\frac{R^2}{r^2} \quad .....(iv) \qquad [\text{जहाँ } r = R + h]$$

Important points

(i) जैसे-जैसे हम पृथ्वी की सतह से ऊपर जाते हैं g के मान में कमी आती जाती है क्योंकि $g' \propto \frac{1}{r^2}$.

(ii) यदि $r = \infty$ हो तो $g' = 0$ अर्थात् पृथ्वी से अनंत दूरी पर g का मान शून्य होता है।

(iii) यदि $h << R$ अर्थात् ऊँचाई पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में नगण्य हो तो समीकरण (iii) से,

$$g' = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = g\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} = g\left[1-\frac{2h}{R}\right] \qquad [\text{क्योंकि } h << R]$$

(iv) यदि $h << R$ तो g के मान में ऊँचाई के साथ कमी

निरपेक्ष कमी $\Delta g = g - g' = \frac{2hg}{R}$

भिन्नात्मक कमी $\frac{\Delta g}{g} = \frac{g-g'}{g} = \frac{2h}{R}$

प्रतिशत कमी $\frac{\Delta g}{g} \times 100\% = \frac{2h}{R} \times 100\%$

<u>Problem</u> 15. पृथ्वी के आकर्षण बल के कारण किसी पिण्ड में उत्पन्न त्वरण का मान पृथ्वी की सतह से $2R$ ऊँचाई पर क्या होगा (जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या, g पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण) [MP PET 2003]

(a) $\frac{g}{9}$ (b) $\frac{g}{3}$ (c) $\frac{g}{4}$ (d) g

Solution : (a) $\frac{g'}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \left(\frac{R}{R+2R}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \therefore g' = \frac{g}{9}$

<u>Problem</u> 16. पृथ्वी की सतह से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर उस बिन्दु की ऊँचाई, जहाँ गुरुत्वीय त्वरण का मान, सतह पर उसके मान का 1% रह जाता है (R = पृथ्वी की त्रिज्या), होगी [EAMCET (Engg.) 2000]

(a) $8R$ (b) $9R$ (c) $10\,R$ (d) $20R$

Solution : (b) h ऊँचाई पर g का मान $g' = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$

प्रश्नानुसार, $\frac{g}{100} = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Rightarrow \frac{R}{R+h} = \frac{1}{10} \Rightarrow h = 9R$.

Problem 17. पृथ्वी की सतह पर एक मनुष्य का भार 72 N है। सतह से $R/2$ ऊँचाई पर उसका भार होगा

[CBSE PMT 2000; AIIMS 2000]

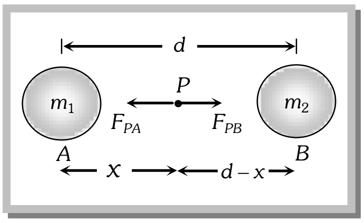
(a) 28N (b) 16N (c) 32N (d) 72N

Solution : (c) R ऊँचाई पर किसी वस्तु का भार, $W' = W\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = W\left(\frac{R}{R+\frac{R}{2}}\right)^2 = W\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}W = \frac{4}{9}\times 72 = 32N.$

Problem 18. यदि पृथ्वी व चन्द्रमा के केन्द्रों के मध्य दूरी D हो और पृथ्वी का भार चन्द्रमा की तुलना में 81 गुना हो तो पृथ्वी के केन्द्र से किस दूरी पर गुरुत्वाकर्षण बल शून्य होगा [RPET 1996]

(a) $D/2$ (b) $2D/3$ (c) $4D/3$ (d) $9D/10$

Solution : (d) माना बिन्दु P पर कुल गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है तब $F_{PA} = F_{PB}$



$$\Rightarrow \frac{Gm_1m}{x^2} = \frac{Gm_2m}{(d-x)^2}$$

हल करने पर, $x = \frac{\sqrt{m_1}\,d}{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}$

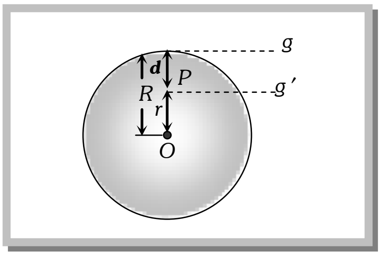
प्रश्नानुसार $d = D$, $m_1 =$ पृथ्वी का द्रव्यमान, $m_2 =$ चन्द्रमा का द्रव्यमान तथा $m_1 = 81m_2$ $\therefore m_2 = \frac{m_1}{81}$

अतः $x = \frac{\sqrt{m_1}\,D}{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}} = \frac{\sqrt{m_1}\,D}{\sqrt{m_1}+\sqrt{\frac{m_1}{81}}} = \frac{D}{1+\frac{1}{9}} = \frac{9D}{10}$

Topperseducations.co.in

गहराई के साथ g के मान में परिवर्तन

पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho GR$ .....(i)



पृथ्वी की सतह से d गहराई तक जाने पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g' = \frac{4}{3}\pi\rho G(R-d) \quad .....(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से, $g' = g\left[1-\frac{d}{R}\right]$

Important points

(i) पृथ्वी की सतह से नीचे जाने पर g के मान में कमी आती है। समीकरण (ii) से स्पष्ट है कि $g' \propto (R-d)$ अर्थात् यदि d बढ़े तो g कम होगा।

(ii) पृथ्वी के केन्द्र पर $d = R$ अतः $g' = 0$ अर्थात् पृथ्वी के केन्द्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य होता है।

(iii) गहराई के साथ g के मान में कमी

निरपेक्ष कमी $\Delta g = g - g' = \dfrac{dg}{R}$

भिन्नात्मक कमी $\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{g-g'}{g} = \dfrac{d}{R}$

प्रतिशत कमी $\dfrac{\Delta g}{g} \times 100\% = \dfrac{d}{R} \times 100\%$

(iv) पृथ्वी की सतह से ऊपर जाने पर g के मान में कमी की दर ($h << R$), सतह से नीचे जाने पर g के मान में कमी की दर के दोगुने के तुल्य होती है।

Problem 19. पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई तक जाने पर किसी वस्तु के भार में 1% कमी आती है। यदि वस्तु को सतह से h गहराई नीचे ले जाया जाए तो भार में परिवर्तन होगा [KCET 2003; MP PMT 2003]

(a) 2% कमी (b) 0.5% कमी (c) 1% वृद्धि (d) 0.5% वृद्धि

Solution : (b) h ऊँचाई पर g के मान में % परिवर्तन $\dfrac{\Delta g}{g} \times 100\% = \dfrac{2h \times 100}{R} = 1\%$

h गहराई पर g के मान में % परिवर्तन $\dfrac{\Delta g}{g} \times 100\% = \dfrac{d}{R} \times 100\% = \dfrac{h}{R} \times 100\%$ [चूँकि $d = h$]

$\therefore$ भार के प्रतिशत में कमी $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2h}{R} \times 100\right) = \dfrac{1}{2}(1\%) = 0.5\%$

Problem 20. किस गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण का प्रभावी मान $\dfrac{g}{4}$ होगा (R = पृथ्वी की त्रिज्या) [MP PET 2003]

(a) R (b) $\dfrac{3R}{4}$ (c) $\dfrac{R}{2}$ (d) $\dfrac{R}{4}$

Solution : (b) $g' = g\left(1 - \dfrac{d}{R}\right) \Rightarrow \dfrac{g}{4} = g\left(1 - \dfrac{d}{R}\right) \Rightarrow d = \dfrac{3R}{4}$

Problem 21. पृथ्वी को एकसमान घनत्व का गोला मानें तो पृथ्वी की सतह से 100 km गहरी खदान में गुरुत्वीय त्वरण होगा (R = 6400km) [AFMC 2000; Pb. PMT 2000]

(a) $9.66 m/s^2$ (b) $7.64 m/s^2$ (c) $5.06 m/s^2$ (d) $3.10 m/s^2$

Solution : (a) गहराई d पर गुरुत्वीय त्वरण $g' = g\left[1 - \dfrac{d}{R}\right] = g\left[1 - \dfrac{100}{6400}\right] = 9.8\left[1 - \dfrac{1}{64}\right] = 9.8 \times \dfrac{63}{64} = 9.66 m/s^2$

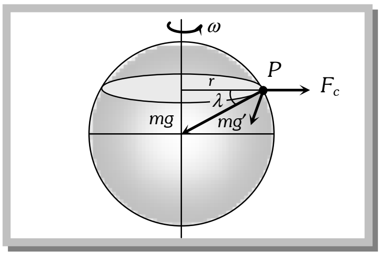
Problem 22. पृथ्वी की सतह से d गहराई तक जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान, सतह पर उसके मान का $\frac{1}{n}$ गुना रह जाता है। d का मान होगा [R = पृथ्वी की त्रिज्या] [MP PMT 1999]

(a) $\frac{R}{n}$ (b) $R\left(\frac{n-1}{n}\right)$ (c) $\frac{R}{n^2}$ (d) $R\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Solution : (b) $g' = g\left(1-\frac{d}{R}\right) \Rightarrow \frac{g}{n} = g\left(1-\frac{d}{R}\right) \Rightarrow \frac{d}{R} = 1-\frac{1}{n} \Rightarrow d = \left(\frac{n-1}{n}\right)R$

पृथ्वी के घूर्णन के कारण g के मान में परिवर्तन

पृथ्वी की अपने अक्ष पर घूर्णन गति के कारण उसकी सतह पर रखी सभी वस्तुएँ वृत्ताकार मार्गों पर घूमती हैं अतः अपकेन्द्र बल का अनुभव करती हैं। जिसके कारण वस्तु के भार में कमी का आभास होता है।



चूँकि अपकेन्द्र बल का परिमाण अक्षांश परिवर्तन के साथ बदलता है अतः वस्तु का आभासी भार भी अक्षांश परिवर्तन के साथ बदलता है।

यदि m द्रव्यमान की एक वस्तु पृथ्वी की सतह पर बिन्दु P पर λ अक्षांश पर रखी हो तो पृथ्वी के घूर्णन के कारण वस्तु का आभासी भार $\overrightarrow{mg'} = \overrightarrow{mg} + \overrightarrow{F_c}$

या $mg' = \sqrt{(mg)^2 + (F_c)^2 + 2mg\, F_c \cos(180-\lambda)}$

$\Rightarrow$ $mg' = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 R\cos\lambda)^2 + 2mg\, m\omega^2 R\cos\lambda\,(-\cos\lambda)}$ $[F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\lambda]$

हल करने पर $g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda$

- किसी बिन्दु से पृथ्वी के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा व भूमध्य रेखा के मध्य बनने वाला कोण उस बिन्दु का अक्षांश कोण कहलाता है। इसे λ से प्रदर्शित करते हैं।
- ध्रुवों के लिए $\lambda = 90^o$ व भूमध्य रेखा के लिए $\lambda = 0^o$

Important points

(i) उपरोक्त समीकरण में $\lambda = 90^o$ प्रतिस्थापित करने पर, $g_{pole} = g - \omega^2 R\cos^2 90^o$

$\therefore$ $g_{pole} = g$ .....(i)

अर्थात् ध्रुवों पर g के मान में पृथ्वी के घूर्णन का प्रभाव नहीं पड़ता।

(ii) उपरोक्त समीकरण में, $\lambda = 0^o$ प्रतिस्थापित करने पर $g_{eqator} = g - \omega^2 R\cos^2 0^o$

$\therefore$ $g_{equator} = g - \omega^2 R$ .....(ii)

अर्थात् भूमध्य रेखा पर g के मान में पृथ्वी के घूर्णन का प्रभाव अधिकतम होता है।

समीकरण (i) व (ii) से $g_{pole} - g_{equator} = R\omega^2 = 0.034 m/s^2$

(iii) यदि m द्रव्यमान की एक वस्तु भूमध्य रेखा से ध्रुवों की ओर ले जायी जाए तो उसके भार में वृद्धि

$$m(g_p - g_e) = m\omega^2 R$$

(iv) पृथ्वी के घूर्णन के कारण भारहीनता : जैसा कि हम जानते हैं कि पृथ्वी के घूर्णन के कारण वस्तु के भार में कमी का आभास होता है। यदि कोणीय वेग ω के लिए भूमध्य रेखा पर स्थित किसी बिन्दु का आभासी भार शून्य हो तो

$$g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda$$

$\Rightarrow \quad 0 = g - \omega^2 R\cos^2 0^o \qquad [\lambda = 0^o$ भूमध्य रेखा पर]

$\Rightarrow \quad g = \omega^2 R$

$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

अथवा पृथ्वी के घूर्णन का आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

$R = 6400\times 10^3 m$ व $g = 10 m/s^2$ रखने पर

$\omega = \frac{1}{800} = 1.25\times 10^{-3}\frac{rad}{sec}$ व $T = 5026.5\ sec = 1.40\ hr.$

- यह समय पृथ्वी के वर्तमान आवर्तकाल का $\frac{1}{17}$ गुना है। अतः यदि पृथ्वी 17 गुना तेज घूर्णन प्रारम्भ कर दे, तो भूमध्य रेखा पर स्थित सभी वस्तुऐं भारहीनता की स्थिति में आ जाएंगी।
- यदि पृथ्वी अपने अक्ष के परितः घूर्णन करना बंद कर दे तो भूमध्य रेखा पर g के मान में $\omega^2 R$ की वृद्धि होगी, साथ ही वस्तु के भार में $m\omega^2 R$ की वृद्धि होगी।
- पृथ्वी के आकार व घूर्णन के कारण ध्रुवों व विषुवत् रेखा पर g के मान में संबंध

$$g_p = g_e + 0.034 + 0.018 m/s^2 \qquad \therefore g_p = g_e + 0.052 m/s^2$$

Problem 23. पृथ्वी किस कोणीय वेग से घूर्णन करे कि 60° अक्षांश पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य हो जाए (R = 6400 km व g = 10 ms^{-2}) [EAMCET 2000]

(a) $2.5\times10^{-3} rad/sec$ (b) $5.0\times10^{-1} rad/sec$ (c) $10\times10^{1} rad/sec$ (d) $7.8\times10^{-2} rad/sec$

Solution : (a) पृथ्वी के घूर्णन के कारण λ अक्षांश पर g का मान $g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda$

प्रश्नानुसार, $0 = g - \omega^2 R\cos^2 60^o \Rightarrow \frac{\omega^2 R}{4} = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4g}{R}} = 2\sqrt{\frac{g}{R}} = \frac{2}{800}\frac{rad}{sec}$ [चूँकि $g' = 0$ व $\lambda = 60^o$]

$\Rightarrow \omega = \frac{1}{400} = 2.5\times10^{-3}\frac{rad}{sec}$

Problem 24. यदि पृथ्वी घूर्णन करना बंद कर दे तो उस पर स्थित किसी मनुष्य का भार [AFMC 1994]

(a) बढ़ेगा (b) घटेगा (c) समान रहेगा (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (a) यदि पृथ्वी घूर्णन बंद कर दे तो उसकी सतह पर स्थित किसी, मनुष्य पर लगने वाला अपकेन्द्र बल शून्य हो जाएगा अर्थात् मनुष्य का प्रभावी भार बढ़ेगा।

Problem 25. यदि पृथ्वी के कोणीय वेग को इतना बढ़ा दें की विषुवत् रेखा पर स्थित वस्तुएँ, स्पर्श रेखीय दिशा में उड़ने लगें तो दिन की लम्बाई क्या होगी

(a) 1.5 hours (b) 8 hours (c) 18 hours (d) 24 hours

Solution : (a) दी गयी स्थिति में पृथ्वी का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 1.40\,hr \approx 1.5\,hr$.

पृथ्वी का द्रव्यमान व घनत्व

पृथ्वी के द्रव्यमान की गणना न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम से की जा सकती है।

हम जानते हैं कि, $g = \frac{GM}{R^2}$ अतः $M = \frac{gR^2}{G}$

$\therefore$ $M = \frac{9.8\times(6.4\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}} = 5.98\times10^{24}\,kg \approx 10^{25}\,kg$

पुनः $g = \frac{4}{3}\pi\rho GR$ अतः $\rho = \frac{3g}{4\pi GR}$

$\therefore$ $\rho = \frac{3\times9.8}{4\times3.14\times6.67\times10^{-11}\times6.4\times10^6} = 5478.4\ kg/m^3$

Topperseducations.co.in

जड़त्वीय व गुरुत्वीय द्रव्यमान

(1) **जड़त्वीय द्रव्यमान** : यह द्रव्य पिण्ड का वह द्रव्यमान है जो उसके जड़त्व की माप करता है।

यदि m_i द्रव्यमान की वस्तु पर बाह्य बल F लगाने पर त्वरण a उत्पन्न हो तो न्यूटन के गति विषयक द्वितीय नियम से,

$$F = m_i a \text{ या } m_i = \frac{F}{a}$$

अतः पिण्ड का जड़त्वीय द्रव्यमान, बाह्य बल के परिमाण व गति में उत्पन्न त्वरण के परिमाण के अनुपात से मापा जा सकता है।

Important points

(i) वस्तु की वह क्षमता जो बाह्य बल लगाने पर उत्पन्न त्वरण का विरोध करे जड़त्वीय द्रव्यमान कहलाती है।
(ii) जड़त्वीय द्रव्यमान पर गुरूत्व का प्रभाव नहीं पड़ता।
(iii) यह पिण्ड में समाहित पदार्थ की मात्रा के समानुपाती होता है।
(iv) यह वस्तु के आकार, आकृति व अवस्था पर निर्भर नहीं करता।
(v) यह पिण्ड के तापमान पर निर्भर नहीं करता।
(vi) यदि दो पिण्ड भौतिक अथवा रासायनिक रूप से संयुक्त होते हैं तो जड़त्वीय द्रव्यमान अपरिवर्तित रहता है।
(vii) यदि पिण्ड v वेग से गतिमान हो तो उसका जड़त्वीय द्रव्यमान

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$, जहाँ m_0 = पिण्ड का विराम द्रव्यमान, c = निर्वात् में प्रकाश का वेग

(2) **गुरुत्वीय द्रव्यमान** : यह द्रव्य पिण्ड का वह द्रव्यमान है जो पिण्ड पर लगने वाले गुरुत्वीय बल (Pull) की माप करता है।

यदि पृथ्वी का द्रव्यमान M व त्रिज्या R हो तब m_g द्रव्यमान की वस्तु पर लगने वाला गुरुत्वीय बल

$$F = \frac{GMm_g}{R^2} \text{ अथवा } m_g = \frac{F}{(GM/R^2)} = \frac{F}{E}$$

जहाँ m_g वस्तु का गुरुत्वीय द्रव्यमान कहलाता है। यदि $E = 1$ हो तो $m_g = F$

अर्थात् एकांक तीव्रता वाले किसी गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी पिण्ड पर लगने वाला गुरुत्वीय बल उसके गुरुत्वीय द्रव्यमान के तुल्य होगा।

(3) जड़त्वीय व गुरुत्वीय द्रव्यमानों की तुलना

(i) दोनों की इकाई समान है।

(ii) दोनों अदिश हैं।

(iii) दोनों वस्तु की आकृति व अवस्था पर निर्भर नहीं करते।

(iv) जड़त्वीय द्रव्यमान की गणना न्यूटन के गति विषयक द्वितीय नियम से की जाती है जबकि गुरुत्वीय द्रव्यमान की गणना न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम से की जाती है।

(4) पिण्ड के द्रव्यमान व भार की तुलना

द्रव्यमान (m)	भार (W)
यह पिण्ड में उपस्थित पदार्थ की मात्रा है।	यह पृथ्वी द्वारा किसी वस्तु पर आरोपित आकर्षण बल है।
इसका मान g के साथ अपरिवर्तित रहता है।	इसका मान g के साथ परिवर्तित होता है।
किसी द्रव्य कण के लिए इसका मान शून्य नहीं हो सकता	अनन्त व पृथ्वी के केन्द्र पर किसी पिण्ड का भार शून्य होता है।
मात्रक – किग्रा व विमीय सूत्र $[M]$	मात्रक – न्यूटन N या किग्रा-भार व विमीय सूत्र $[MLT^{-2}]$
इसकी गणना भौतिक तुला से की जा सकती है।	इसकी गणना कमानीदार तुला से की जाती है।
यह अदिश राशि है।	यह सदिश राशि है।

Problem 26. गुरुत्वीय द्रव्यमान समानुपाती होता है, गुरुत्वीय [AIIMS 1998]

(a) क्षेत्र के (b) बल के (c) तीव्रता के (d) सभी के

Solution : (d)

Problem 27. जड़त्वीय व गुरुत्वीय द्रव्यमानों का अनुपात होता है। [CPMT 1978]

(a) 1/2 (b) 1 (c) 2 (d) कोई स्थायी मान नहीं

Solution : (b)

गुरुत्वीय क्षेत्र

किसी द्रव्य पिण्ड के चारों ओर का वह आकाश (space) जहाँ कोई अन्य पिण्ड गुरुत्वाकर्षण बल का अनुभव कर सके गुरुत्वीय क्षेत्र कहलाता है।

गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता: किसी द्रव्य पिण्ड के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में, किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता उस बिन्दु पर उपस्थित एकांक द्रव्यमान के पिण्ड पर लगने वाले गुरुत्वीय बल के तुल्य होती है।

यदि एक परीक्षण द्रव्यमान m गुरुत्वीय क्षेत्र के किसी बिन्दु पर $\vec{F}$ बल का अनुभव करे तब

$$\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m}$$

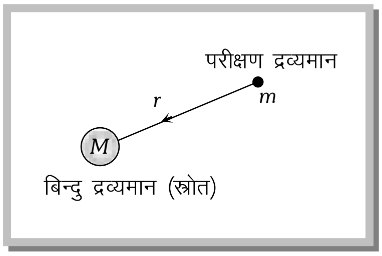
Important points

(i) यह सदिश राशि है। इसकी दिशा उस पिण्ड के गुरूत्व केन्द्र की ओर होती है, जिसके गुरुत्वीय क्षेत्र की गणना की जाए।

(ii) इकाई : $Newton/kg$ या m/s^2

(iii) विमीय सूत्र : $[M^0LT^{-2}]$

(iv) यदि बिन्दु द्रव्यमान M के क्षेत्र में, r दूरी पर परीक्षण द्रव्यमान m रखा हो तो न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम से, $F = \frac{GMm}{r^2}$



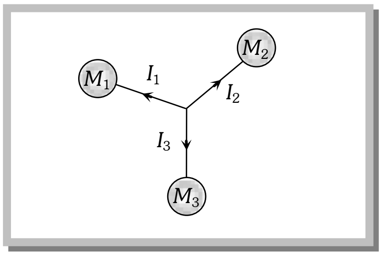
अतः गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $I = \frac{F}{m} = \frac{GMm/r^2}{m}$

$$\therefore \qquad I = \frac{GM}{r^2}$$

(v) जैसे-जैसे परीक्षण द्रव्यमान m, बिन्दु द्रव्यमान M से दूर जाता है, गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता घटती है।

$\therefore\ I = \frac{GM}{r^2}$; $\therefore\ I \propto \frac{1}{r^2}$

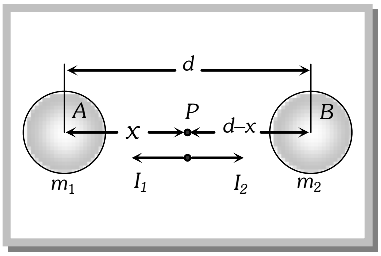
(vi) $r = \infty$ पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $I = 0$



(vii) किसी बिन्दु (P) पर कई बिन्दु द्रव्यमानों के कारण परिणामी गुरुत्वीय क्षेत्र तीव्रता, बिन्दु द्रव्यमानों के कारण पृथक पृथक तीव्रताओं के सदिश योग के तुल्य होती है।

$$\overrightarrow{I_{net}} = \vec{I_1} + \vec{I_2} + \vec{I_3} + \ldots\ldots$$

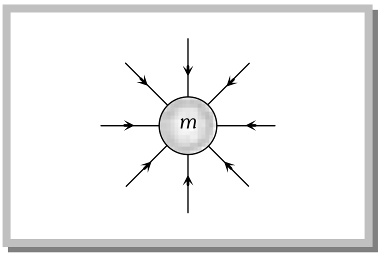
(viii) शून्य तीव्रता का बिन्दु : यदि m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो पिण्ड A व B एक दूसरे से चित्रानुसार d दूरी पर स्थित हों व उनके मध्य बिन्दु P शून्य तीव्रता का बिन्दु हो अर्थात् यदि बिन्दु P पर कोई परीक्षण आवेश रखा जाए तो A व B के कारण वह कोई बल का अनुभव नहीं करेगा ($\therefore$ बिन्दु P पर परिणामी तीव्रता शून्य है)



अतः बिन्दु P पर $\vec{I_1} + \vec{I_2} = 0 \quad \Rightarrow \frac{-Gm_1}{x^2} + \frac{Gm_2}{(d-x)^2} = 0$

हल करने पर, $x = \frac{\sqrt{m_1}\, d}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}$ व $(d - x) = \frac{\sqrt{m_2}\, d}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}$

(ix) यदि किसी परीक्षण आवेश को, किसी बिन्दु द्रव्यमान के गुरुत्वीय क्षेत्र में स्वतंत्रतापूर्वक रखा जाए तो परीक्षण आवेश जिस सरल अथवा वक्र मार्ग का अनुसरण करता है वह मार्ग गुरुत्वीय क्षेत्र रेखा कहलाता है।



किसी विलगित द्रव्यमान m की गुरुत्वीय क्षेत्र रेखाएँ त्रिज्यीय अन्दर की ओर होती हैं।

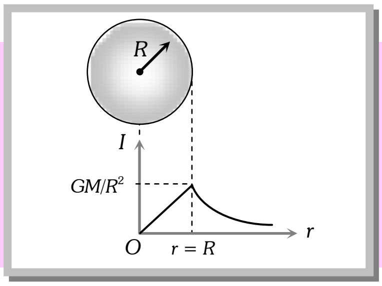
(x) $I = \frac{GM}{R^2}$ (पृथ्वी की सतह पर) तथा $g = \frac{GM}{R^2}$ $\therefore$ $I = g$

अतः स्पष्ट है कि किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता, उस बिन्दु पर रखे परीक्षण आवेश में उत्पन्न त्वरण के तुल्य होती है।

मानक द्रव्यमान वितरणों के कारण गुरुत्वीय क्षेत्र

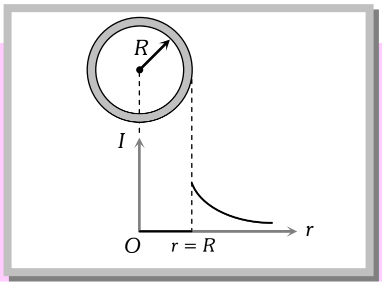
(1) एकसमान ठोस गोला

गोले के बाहर $r > R$	गोले की सतह पर $r = R$	गोले के अंदर $r < R$
$I = \frac{GM}{r^2}$	$I = \frac{GM}{R^2}$	$I = \frac{GMr}{R^3}$



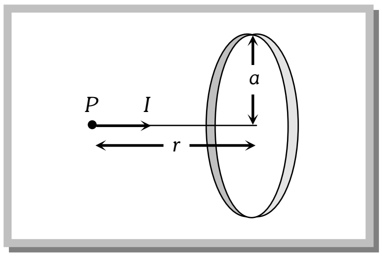
(2) गोलीय कोश

गोलीय कोश के बाहर $r > R$	गोलीय कोश की सतह पर $r = R$	गोलीय कोश के अंदर $r < R$
$I = \frac{GM}{r^2}$	$I = \frac{GM}{R^2}$	$I = 0$



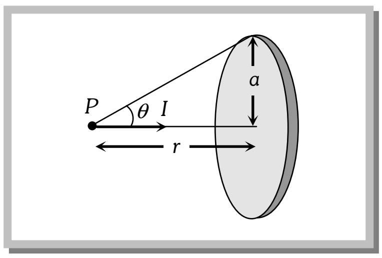
(3) एकसमान वृत्तीय वलय के गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

अक्ष के किसी बिन्दु पर	वलय के केन्द्र पर
$I = \frac{GMr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$	$I = 0$



(4) एकसमान वृत्ताकार चकती के गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

अक्ष के किसी बिन्दु पर	चकती के केन्द्र पर
$I = \frac{2GMr}{a^2}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right]$ या $I = \frac{2GM}{a^2}(1 - \cos\theta)$	$I = 0$



Problem 28. चंद्रमा का द्रव्यमान $\frac{M}{81}$ है, जहाँ M पृथ्वी का द्रव्यमान है। चन्द्रमा से पृथ्वी की दूरी $60\,R$ है, जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या है तो चन्द्रमा से कितनी दूरी पर, चन्द्रमा व पृथ्वी के मध्य किसी बिन्दु पर चन्द्रमा व पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्रों की तीव्रताएँ एक दूसरे को निरस्त करेंगी [AIIMS 2000]

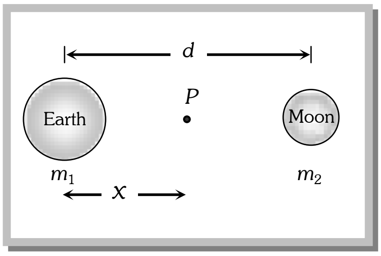
(a) $2\,R$ (b) $4\,R$ (c) $6\,R$ (d) $8\,R$

Solution : (c) शून्य तीव्रता के बिन्दु की स्थिति $x = \frac{\sqrt{m_1}\,d}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}$

माना $m_1 = M$ (पृथ्वी का द्रव्यमान), $m_2 = \frac{M}{81}$ (चन्द्रमा का द्रव्यमान)

पृथ्वी व चन्द्रमा के मध्य दूरी $d = 60R$

पृथ्वी से शून्य तीव्रता वाले बिन्दु की दूरी $x = \frac{\sqrt{M} \times 60R}{\sqrt{M} + \sqrt{\frac{M}{81}}} = \frac{9}{10} \times 60R = 54R$



अतः चन्द्रमा से शून्य तीव्रता वाले बिन्दु की दूरी $= 60R - 54R = 6R$

Problem 29. किसी क्षेत्र में गुरुत्वीय विभव $V = (3x + 4y + 12z)\,J/kg.$ है। क्षेत्र के बिन्दु $(x = 1, y = 0, z = 3)$ पर क्षेत्र की तीव्रता होगी [BHU 1997]

(a) $20\,N\,kg^{-1}$ (b) $13\,N\,kg^{-1}$ (c) $12\,N\,kg^{-1}$ (d) $5\,N\,kg^{-1}$

Solution : (b) $\vec{I} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) = -\left(3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}\right)$ [चूँकि $V = (3x + 4y + 12z)$ (दिया गया है)]

यह एक एकसमान क्षेत्र है अतः प्रत्येक बिन्दु पर तीव्रता समान होगी $|\vec{I}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13\,N\text{-}\,kg^{-1}$

Problem 30. द्रव्यमान M व त्रिज्या R के एकसमान गोले से r_1 व r_2 दूरियों पर क्षेत्र की तीव्रताओं में परिमाण क्रमशः F_1 व F_2 हो तो [IIT-JEE 1994]

(a) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1}{r_2}$ यदि $r_1 < R$ और $r_2 < R$

(b) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ यदि $r_1 > R$ और $r_2 > R$

(c) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1}{r_2}$ यदि $r_1 > R$ और $r_2 > R$

(d) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$ यदि $r_1 < R$ और $r_2 < R$

Solution : (a, b) हम जानते हैं कि गुरुत्वीय बल $\propto$ तीव्रता $\propto \frac{1}{r^2}$ जबकि $r > R$ [$I = \frac{GM}{r^2}$]

$\therefore \frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ यदि $r_1 > R$ और $r_2 > R$

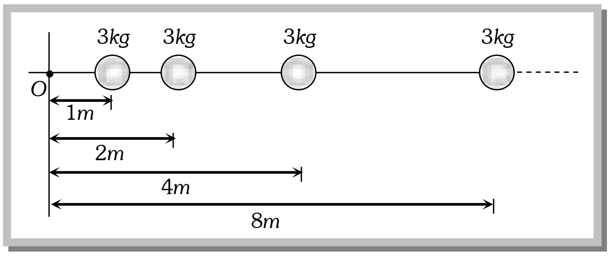
तथा गुरुत्वीय बल $\propto$ तीव्रता $\propto r$ जबकि $r < R$ [$I = \frac{4}{3}\pi\rho G r$]

$\therefore \frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1}{r_2}$ यदि $r_1 < R$ और $r_2 < R$

Problem 31. x-अक्ष पर $1m, 2m, 4m, 8m$....... दूरियों पर $3kg$ द्रव्यमान के अनंत पिण्ड रखे हैं। मूल बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की परिणामी तीव्रता होगी

(a) G (b) $2G$ (c) $3G$ (d) $4G$

Solution : (d) मूलबिन्दु पर तीव्रता $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + ...$



$$= \frac{GM}{r_1^2} + \frac{GM}{r_2^2} + \frac{GM}{r_3^2} + \frac{GM}{r_4^2} + ...$$

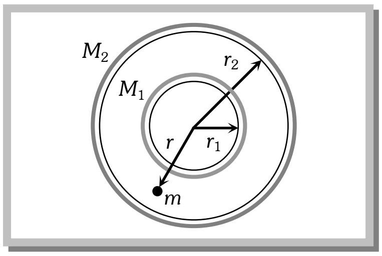
$$= GM\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + ...\right]$$

$$= GM\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...\right]$$

$$= GM\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)$$ [गुणोत्तर श्रेणी का योग $= \frac{a}{1-r}$]

$$= GM \times \frac{4}{3} = G \times 3 \times \frac{4}{3} = 4G$$ [$M = 3kg$ दिया है]

Problem 32. M_1 व M_2 द्रव्यमान के दो गोलीय कोशों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1 व r_2 हैं। तो द्रव्यमान m पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का सही व्यंजक है



(a) $I = \frac{G(M_1 + M_2)}{r^2}$, $r < r_1$ के लिए

(b) $I = \frac{G(M_1 + M_2)}{r^2}$, $r < r_2$ के लिए

(c) $I = G\frac{M_2}{r^2}$, $r_1 < r < r_2$ के लिए

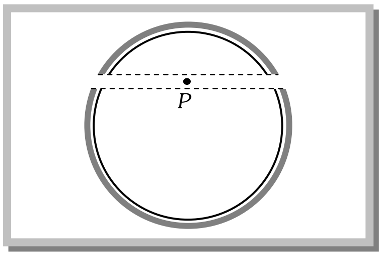
(d) $I = \frac{GM_1}{r^2}$, $r_1 < r < r_2$ के लिए

Solution : (d) द्रव्यमान m पर बाह्य कोश (त्रिज्या r_2) के कारण तीव्रता शून्य होगी क्योंकि m इसके अंदर स्थित है।

परन्तु आंतरिक कोश (त्रिज्या r_1), m के लिए इस प्रकार व्यवहार करेगा मानों सम्पूर्ण द्रव्यमान उसके केन्द्र पर स्थित हो।

अतः $I = \frac{GM_1}{r^2}$ [$r_1 < r < r_2$ के लिए]

Problem 33. एक गोलीय कोश चित्रानुसार, किसी जीवा के अनुदिश दो भागों में काटा गया है। P जीवा के तल पर स्थित कोई बिन्दु है। बिन्दु P पर ऊपरी भाग के कारण गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता I_1 व निचले भाग के कारण गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता I_2 हो तो I_1 व I_2 में संबंध होगा



(a) $I_1 > I_2$

(b) $I_1 < I_2$

(c) $I_1 = I_2$

(d) संबंध निश्चित नहीं है

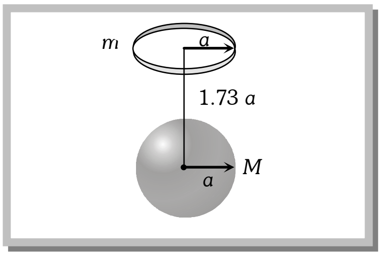
Solution : (c) बिन्दु P पर ऊपरी भाग के कारण तीव्रता $= \vec{I_1}$

तथा बिन्दु P पर निचले भाग के कारण तीव्रता $= \vec{I_2}$

बिन्दु P पर सम्पूर्ण कोश के कारण तीव्रता $\vec{I_1} + \vec{I_2} = 0$

$\therefore \vec{I_1} = -\vec{I_2}$

Problem 34. M द्रव्यमान के एक गोले के ठीक 1.73 a ऊपर m द्रव्यमान का एक वलय स्थित है। गोले व वलय की त्रिज्याएँ a हैं। तब गुरुत्वाकर्षण बल का मान होगा



(a) $\frac{GMm}{8a^2}$

(b) $\frac{GMm}{(1.73\,a)^2}$

(c) $\sqrt{3}\frac{GMm}{a^2}$

(d) $1.73\frac{GMm}{8a^2}$

Solution : (d) वलय के अक्ष पर तीव्रता $I = \frac{Gmr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$

गोले पर लगने वाला बल $F = \frac{GMmr}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \frac{GMm\sqrt{3}a}{(a^2+(\sqrt{3}a)^2)^{3/2}}$

$$= \frac{GMm\sqrt{3}a}{(4a^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}GMm}{8a^2} \qquad [\;r = \sqrt{3}a\,]$$

गुरुत्वीय विभव

एकांक द्रव्यमान को अनंत से गुरुत्वीय क्षेत्र के अंदर किसी बिन्दु तक लाने में जितना कार्य होता है उसे उस बिन्दु का गुरुत्वीय विभव कहते हैं। यह कार्य हमें प्राप्त होता है (करना नहीं पड़ता) अर्थात् कार्य ऋणात्मक होता है।

$$V = -\frac{W}{m} = -\int \frac{\vec{F}.\vec{dr}}{m} = -\int \vec{I}.\vec{dr} \qquad \left[\frac{F}{m} = I \right]$$

$$\therefore \qquad I = -\frac{dV}{dr}$$

अर्थात् विभव की ऋणात्मक प्रवणता, तीव्रता के तुल्य होती है।

विभव स्थिति का अदिश फलन है जिसका आकाश (Space) अवकलन, तीव्रता के तुल्य होता है। ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि तीव्रता की दिशा वह होती है जहाँ विभव घटता है।

Important points

(i) यह एक अदिश राशि है क्योंकि यह प्रति एकांक द्रव्यमान कार्य के रूप में परिभाषित है।

(ii) इकाई : $Joule/kg$ या m^2/sec^2

(iii) विमीय सूत्र : $[M^0L^2T^{-2}]$

(iv) यदि क्षेत्र किसी बिन्दु द्रव्यमान के कारण उत्पन्न हो, तब

$$V = -\int I\,dr = -\int \left(-\frac{GM}{r^2}\right) dr \qquad \left[\quad I = -\frac{GM}{r^2}\right]$$

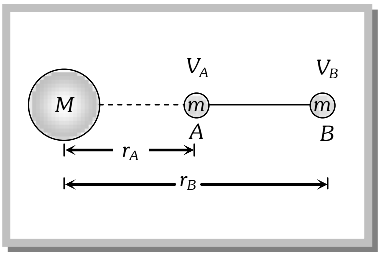
$$\therefore \qquad V = -\frac{GM}{r} + c \qquad [\text{जहाँ } c = \text{ समाकलन नियतांक}]$$

निर्देश बिन्दु को अनंत पर मानते हुए एवं वहाँ पर विभव शून्य ($V = 0$) मानने पर

$$0 = -\frac{GM}{\infty} + c \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore \qquad \text{गुरुत्वीय विभव } V = -\frac{GM}{r}$$

(v) **गुरुत्वीय विभवान्तर** : एकांक द्रव्यमान के किसी पिण्ड को गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य गुरुत्वीय विभवान्तर कहलाता है।



परीक्षण द्रव्यमान m को, बिन्दु द्रव्यमान M के गुरुत्वीय क्षेत्र में चित्रानुसार बिन्दु A से बिन्दु B तक ले जाने में किया गया कार्य

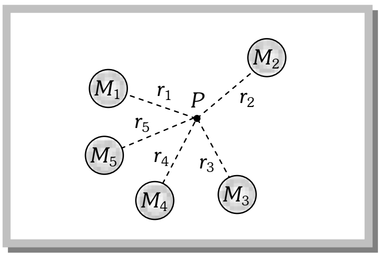
$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{W_{A\to B}}{m} = -GM\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

(vi) कई द्रव्यमान कणों के कारण किसी बिन्दु पर परिणामी विभव, उनके पृथक पृथक विभवों का अदिश योग होता है

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= -\frac{GM}{r_1} - \frac{GM}{r_2} - \frac{GM}{r_3} \ldots\ldots\ldots$$

$$= -G\sum_{i=1}^{i=n} \frac{M_i}{r_i}$$



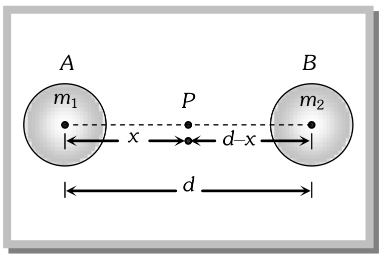
(vii) **शून्य विभव बिन्दु** : यदि एकांक द्रव्यमान को अनंत से गुरुत्वीय क्षेत्र के किसी बिन्दु तक लाने में शून्य कार्य करना पड़े तो वह बिन्दु शून्य विभव बिन्दु होगा।

यदि m_1 और m_2 द्रव्यमानों को d दूरी पर रखा जाए और P उनके मध्य शून्य विभव बिन्दु हो तो

बिन्दु P पर कुल विभव $= V_A + V_B = 0$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{Gm_1}{x} - \frac{Gm_2}{d-x} = 0$$

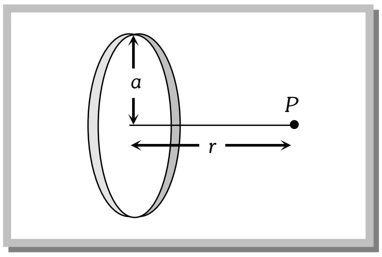
हल करने पर $x = \dfrac{m_1 d}{m_1 - m_2}$



मानक द्रव्यमान वितरणों के कारण गुरुत्वीय विभव

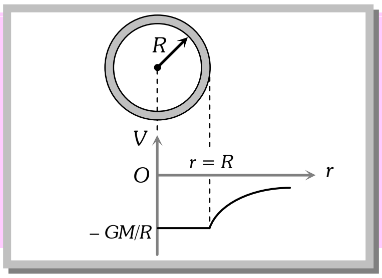
(1) एकसमान वलय

अक्ष के किसी बिन्दु पर	केन्द्र पर
$V = -\frac{GM}{\sqrt{a^2 + r^2}}$	$V = -\frac{GM}{a}$



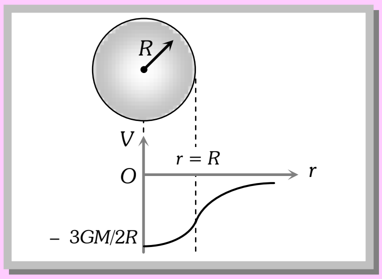
(2) गोलीय कोश

गोलीय कोश के बाहर $r > R$	गोलीय कोश की सतह पर $r = R$	गोलीय कोश के अंदर $r < R$
$V = \frac{-GM}{r}$	$V = \frac{-GM}{R}$	$V = \frac{-GM}{R}$



(3) एकसमान ठोस गोला

गोले के बाहर $r > R$	गोले की सतह पर $r = R$	गोले के अंदर $r < R$
$V = \frac{-GM}{r}$	$V_{सतह} = \frac{-GM}{R}$	$V = \frac{-GM}{2R}\left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ केन्द्र पर $(r = 0)$ $V_{केन्द्र} = \frac{-3}{2}\frac{GM}{R}$ $(max.)$ $V_{केन्द्र} = \frac{3}{2}V_{सतह}$



Problem 35. किसी स्थान पर, गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता शून्य है। वहाँ गुरुत्वीय विभव [BVP 2003]

(a) परिवर्ती होना चाहिए (b) नियत होना चाहिए (c) शून्य नहीं हो सकता (d) शून्य होना चाहिए

Solution : (b) $I = -\frac{dV}{dx}$, यदि $I = 0$ तब $V =$ नियत

Problem 36. किसी द्रव्यमान वितरण के लिए x दिशा में गुरुत्वीय क्षेत्र $E = K/x^3$ से प्रदर्शित है (जहाँ K-नियतांक)। अनंत पर विभव शून्य माने तो x दूरी पर विभव होगा [MP PET 1994]

(a) K/x (b) $K/2x$ (c) K/x^2 (d) $K/2x^2$

Solution : (d) $V = -\int E\,dx = -\int \frac{K}{x^3}dx = \frac{K}{2x^2}$

Problem 37. पृथ्वी के केन्द्र से 8000 km दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $6N/kg$ है इस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव ($Joule/kg$ में) होगा

(a) 8×10^6 (b) 2.4×10^3 (c) 4.8×10^7 (d) 6.4×10^{14}

Solution : (c) गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $I=\frac{GM}{r^2}$ तथा गुरुत्वीय विभव $V=-\frac{GM}{r}$

$$\therefore\ V = I\times r = 6\,N/kg\times 8000\,km = 4.8\times10^7\frac{Joule}{kg}$$

Problem 38. पृथ्वी से अनंत दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर पृथ्वी के कारण विभव शून्य है। मान लीजिए क्षेत्र के किसी बिन्दु P पर विभव $-5J/kg$ है। यदि हम स्वेच्छा से अनंत पर विभव $+10\ J/kg$ मान लें तो बिन्दु P पर विभव होगा

(a) $-5\,J/kg$ (b) $+5\,J/kg$ (c) $-15\,J/kg$ (d) $+15\,J/kg$

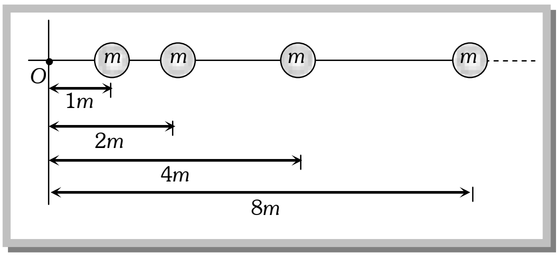
Solution : (b) प्रश्नानुसार प्रत्येक स्थान पर $+10J/kg$ विभव वृद्धि होगी अर्थात् बिन्दु P पर विभव $+10-5=+5J/kg$ होगा।

Problem 39. m द्रव्यमान के अनंत कण चित्रानुसार x-अक्ष पर मूलबिन्दु से, $1m$, $2m$, $3m$, ……… दूरियों पर स्थित हैं तो $x=0$ (मूलबिन्दु) पर कुल गुरुत्वीय विभव होगा

(a) $-Gm$ (b) $-2Gm$ (c) $-4Gm$ (d) $-8Gm$

Solution : (b) मूल बिन्दु पर कुल विभव $V=-\left[\frac{Gm}{r_1}+\frac{Gm}{r_2}+\frac{Gm}{r_3}+........\right]$

$$=-Gm\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right] = -Gm\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = -2Gm$$



Problem 40. m व M द्रव्यमान के पिण्ड एक दूसरे से d दूरी पर स्थित हैं। उस बिन्दु पर, कुल गुरुत्वीय विभव V का मान क्या होगा जहाँ पिण्डों के कारण कुल गुरुत्वीय क्षेत्र शून्य है

(a) $V=-\frac{G}{d}(m+M)$ (b) $V=-\frac{Gm}{d}$ (c) $V=-\frac{GM}{d}$ (d) $V=-\frac{G}{d}(\sqrt{m}+\sqrt{M})^2$

Solution : (d) यदि P शून्य विभव बिन्दु हो तो $x=\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}.d$ व $d-x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}d$

अब बिन्दु P पर विभव , $V=V_1+V_2 = -\frac{GM}{x}-\frac{Gm}{d-x}$

x व $d-x$ का मान रखकर हल करने पर, $V=-\frac{G}{d}\left(\sqrt{m}+\sqrt{M}\right)^2$

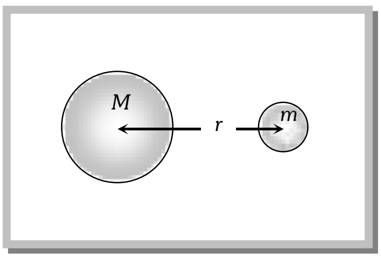
Topperseducations.co.in

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

किसी पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा उस पिण्ड को अनंत से गुरुत्वीय क्षेत्र के किसी बिन्दु तक लाने में गुरूत्व के विरुद्ध जितना कार्य होता है उसे उस बिन्दु पर पिण्ड की गुरुत्वीय ऊर्जा कहते हैं।

$$W=\int_{\infty}^{r}\frac{GMm}{x^2}dx=-GMm\left[\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{r}$$

$$W=-\frac{GMm}{r}$$



यही कार्य पिण्ड में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

$$\therefore U = -\frac{GMm}{r}$$

Important points

(i) स्थितिज ऊर्जा एक अदिश राशि है।

(ii) इकाई : जूल (*Joule*)

(iii) विमीय सूत्र : $[ML^2T^{-2}]$

(iv) गुरुत्वीय क्षेत्र में गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा सदैव ऋणात्मक होती है क्योंकि बल हमेशा आकर्षक प्रकृति का होता है।

(v) दूरी r बढ़ने पर, गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कम ऋणात्मक होती जाती है अर्थात् बढ़ती जाती है।

(vi) यदि $r = \infty$ तब गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य होगी [अधिकतम]।

(vii) कई द्रव्यमान कणो से मिलकर बने निकाय की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = \sum u_i = -\left[\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} + \ldots\ldots\right]$$

(viii) यदि m द्रव्यमान का पिण्ड, r_1 दूरी पर स्थित एक बिन्दु से r_2 दूरी पर स्थित किसी बिन्दु तक ले जाया जाए तब स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन $\Delta U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{x^2} dx = -GMm\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$ या $\Delta U = GMm\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$

यदि $r_1 > r_2$ हो तो स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन ऋणात्मक होगा। अर्थात् यदि कोई पिण्ड पृथ्वी के समीप लाया जाए तो उसकी स्थितिज ऊर्जा घटेगी।

(ix) गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा व विभव में संबंध $U = -\frac{GMm}{r} = m\left[\frac{-GM}{r}\right]$

$\therefore$ $U = mV$

(x) पृथ्वी के केन्द्र पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U_{centre} = mV_{centre} = m\left(-\frac{3}{2}\frac{GM}{R}\right) = -\frac{3}{2}\frac{GMm}{R}$$

(xi) पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U_h = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{gR^2m}{R+h} \equiv -\frac{mgR}{1+\frac{h}{R}}$$

गुरुत्व के विरुद्ध किया गया कार्य

यदि m द्रव्यमान का पिण्ड पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई तक ले जाया जाए तो स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन अथवा गुरुत्व के विरुद्ध किया गया कार्य

$$W = \Delta U = GMm\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$\Rightarrow$ $W = GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$ [$r_1 = R$ व $r_2 = R+h$]

$\Rightarrow \qquad W = \dfrac{GMmh}{R^2\left(1+\dfrac{h}{R}\right)} = \dfrac{mgh}{1+\dfrac{h}{R}} \qquad \left[\ \dfrac{GM}{R^2} = g\ \right]$

Important points

(i) यदि ऊँचाई h नगण्य ना हो व पृथ्वी की त्रिज्या की कोटि की हो तब हम उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करेंगे।

(ii) यदि $h = nR$ तब $W = mgR\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

(iii) यदि $h = R$ तब $W = \dfrac{1}{2}mgR$

(iv) यदि $h << R$ तब पद h/R नगण्य माना जा सकता है।

अतः $\qquad W = \dfrac{mgh}{1+h/R} = mgh \qquad \left[\dfrac{h}{R} \to 0\right]$

Problem 41. m द्रव्यमान के पिण्ड को $2R$ त्रिज्या की कक्षा से $3R$ त्रिज्या की कक्षा में प्रतिस्थापित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा होगी [AIEEE 2002]

(a) $\dfrac{GMm}{12R^2}$ (b) $\dfrac{GMm}{3R^2}$ (c) $\dfrac{GMm}{8R}$ (d) $\dfrac{GMm}{6R}$

Solution : (d) कार्य = स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन $= U_2 - U_1 = \left[-\dfrac{GMm}{r_2}\right] - \left[-\dfrac{GMm}{r_1}\right] = -\dfrac{GMm}{3R} + \dfrac{GMm}{2R} = \dfrac{GMm}{6R}$

Problem 42. m द्रव्यमान का एक पिण्ड की सतह से $2R$ ऊँचाई से गिरना प्रारम्भ करता है जब यह पृथ्वी की सतह से 'R' ऊँचाई पर होगा। इसकी गतिज ऊर्जा होगी [MP PMT 2002]

(a) $\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{R}$ (b) $\dfrac{1}{6}\dfrac{GMm}{R}$ (c) $\dfrac{2}{3}\dfrac{GMm}{R}$ (d) $\dfrac{1}{3}\dfrac{GMm}{R}$

Solution : (b) जब कोई पिण्ड पृथ्वी के समीप आता है उसकी स्थितिज ऊर्जा घटती है व गतिज ऊर्जा बढ़ती है।
अतः गतिज ऊर्जा में वृद्धि = स्थितिज ऊर्जा में कमी
अंतिम गतिज ऊर्जा – प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा = प्रारम्भिक स्थितिज ऊर्जा – अंतिम स्थितिज ऊर्जा

अंतिम गतिज ऊर्जा $- 0 = \left(-\dfrac{GMm}{r_1}\right) - \left(-\dfrac{GMm}{r_2}\right)$

$\therefore$ अंतिम गतिज ऊर्जा $= \left(\dfrac{-GMm}{R+h_1}\right) - \left(-\dfrac{GMm}{R+h_2}\right) = \left(-\dfrac{GMm}{R+2R}\right) - \left(-\dfrac{GMm}{R+R}\right) = -\dfrac{GMm}{3R} + \dfrac{GMm}{2R} = \dfrac{1}{6}\dfrac{GMm}{R}$.

Problem 43. m द्रव्यमान का एक पिण्ड पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई (= पृथ्वी की त्रिज्या) तक ले जाया जाता है स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि होगी [CPMT 1971, 97; IIT-JEE 1983; CBSE PMT 1991; Haryana CEE 1996; CEET Bihar 1995; MNR 1998; RPET 2000]

(a) mgR (b) $\dfrac{1}{2}mgR$ (c) $2mgR$ (d) $\dfrac{1}{4}mgR$

Solution : (b) किया गया कार्य $= \dfrac{mgh}{1+h/R}$, यदि $h = R$ हो तो किया गया कार्य $= \dfrac{mgR}{1+R/R} = \dfrac{1}{2}mgR$

Problem 44. यदि पृथ्वी का द्रव्यमान M, त्रिज्या R व सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक G हो तो $1\ kg$ द्रव्यमान पृथ्वी की सतह से अनंत दूरी तक ले जाने में किया गया कार्य [RPET 1997]

(a) $\sqrt{\frac{GM}{2R}}$ (b) $\frac{GM}{R}$ (c) $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (d) $\frac{GM}{2R}$

Solution : (b) कार्य $= U_{final} - U_{initial} = U_{\infty} - U_R = 0 - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{GMm}{R}$ [$m = 1kg$]

Problem 45. 100 *gm* द्रव्यमान के तीन कण अनंत से लाकर किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे जाते हैं। यदि त्रिभुज की प्रत्येक भुजा 20 *cm* हो तो किया गया कार्य होगा

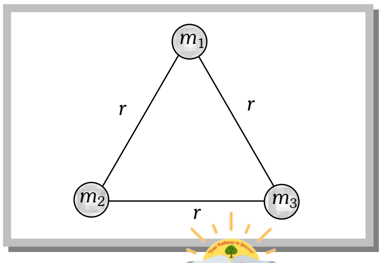
(a) 0.33×10^{-11} *Joule* (b) -0.33×10^{-11} *Joule* (c) 1.00×10^{-11} *Joule* (d) -1.00×10^{-11} *Joule*

Solution : (d) तीन कणों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}}$$

दिया है : $m_1 = m_2 = m_3 = 100\,gm$ व $r_{12} = r_{23} = r_{13} = 2cm$

$$\therefore \quad U = 3\left[\frac{-6.67 \times 10^{-11} \times (10^{-1}) \times (10^{-1})}{20 \times 10^{-2}}\right] = -1.00 \times 10^{-11}\ Joule$$



पलायन वेग

पलायन वेग वह न्यूनतम वेग है जिससे किसी पिण्ड को पृथ्वी तल से ऊपर फेंकने पर वह पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र को पार कर जाता है, और पृथ्वी पर कभी वापस नहीं लौटता है।

पिण्ड को पृथ्वी की सतह से अनंत तक ले जाने में किया गया कार्य

$$W = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{x^2} dx = -GMm\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right]$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{GMm}{R}$$

स्पष्ट है कि यदि हम *m* द्रव्यमान के पिण्ड को इतने वेग से फेंके कि उसकी गतिज ऊर्जा GMm/R के बराबर हो तो वह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र के बाहर अंतरिक्ष में चला जाएगा। यदि v_e आवश्यक पलायन वेग हो तो पिण्ड को $\frac{1}{2}mv_e^2$ गतिज ऊर्जा देनी होगी।

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GMm}{R} \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\Rightarrow \quad v_e = \sqrt{2gR} \qquad [\ GM = gR^2\ ]$$

या

$$v_e = \sqrt{2 \times \frac{4}{3}\pi\rho GR \times R} \quad \Rightarrow \quad v_e = R\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho} \qquad [\ g = \frac{4}{3}\pi\rho GR\ ]$$

Important points

(i) पलायन वेग पिण्ड के द्रव्यमान व पिण्ड को प्रक्षेपित करने की दिशा पर निर्भर नहीं करता।

(ii) पलायन वेग निर्देश पिण्ड (ग्रह) के द्रव्यमान व त्रिज्या पर निर्भर करता है। यदि किसी ग्रह के लिए (M/R) या (gR) का मान अधिक हो तो उस ग्रह के लिए पलायन वेग अधिक होगा।

(iii) पृथ्वी के लिए $g = 9.8m/s^2$ तथा $R = 6400\,km$

$$\therefore v_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} = 11.2km/\sec$$

(iv) यदि किसी ग्रह पर वायुमण्डल में अणुओं का औसत (ऊष्मीय) वेग $\left[v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}\right]$ पलायन वेग से कम हो तो वहाँ वायुमण्डल उपस्थित होगा अन्यथा नहीं। यही कारण है कि पृथ्वी ($v_{rms} < v_e$) पर वायुमण्डल उपस्थित है जबकि चन्द्रमा ($v_{rms} > v_e$) पर वायुमण्डल अनुपस्थित होता है।

(v) यदि किसी पिण्ड को पलायन वेग से कम वेग ($v < v_e$) पर फेंका जाए तो वह महत्तम ऊँचाई तक जाकर या तो पृथ्वी के चारों ओर एक कक्षा में चक्कर लगाने लगेगा या फिर ग्रह की सतह पर गिर जाएगा।

(vi) पिण्ड द्वारा प्राप्त की गयी अधिकतम ऊँचाई : माना किसी पिण्ड का द्रव्यमान (m) है व इसे v वेग से प्रक्षेपित किया जाता है, तो यह h ऊँचाई तक जाता है। अधिकतम ऊँचाई पर चूँकि वेग शून्य होगा, इसलिए गतिज ऊर्जा भी शून्य होगी।

अतः ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

पृष्ठ पर कुल ऊर्जा = h ऊँचाई पर कुल ऊर्जा

$$\Rightarrow \quad -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{R+h} + 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right] = \frac{GMh}{R(R+h)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2GM}{v^2 R} = \frac{R+h}{h} = 1 + \frac{R}{h}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{R}{\left(\frac{2GM}{v^2 R} - 1\right)} = \frac{R}{\frac{v_e^2}{v^2} - 1} = R\left[\frac{v^2}{v_e^2 - v^2}\right] \qquad \left[\because v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \therefore \frac{2GM}{R} = v_e^2\right]$$

(vii) यदि किसी पिण्ड को पलायन वेग से अधिक वेग ($v > v_e$) से फेंका जाए तो ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

पृष्ठ पर कुल ऊर्जा = अनंत पर कुल ऊर्जा

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m(v')^2 + 0$$

अर्थात्

$$(v')^2 = v^2 - \frac{2GM}{R} \Rightarrow v'^2 = v^2 - v_e^2 \qquad \left[\frac{2GM}{R} = v_e^2\right]$$

$$\therefore \quad v' = \sqrt{v^2 - v_e^2}$$

अर्थात् पिण्ड अर्न्तग्रहीय कक्षा में $\sqrt{v^2 - v_e^2}$ वेग से घूमेगा।

(viii) ऊर्जा की वह मात्रा जो किसी पिण्ड को देने पर पृथ्वी की सतह पर उसकी कुल ऊर्जा शून्य हो जाए, पलायन ऊर्जा कहलाती है।

अतः पृथ्वी की सतह पर कुल ऊर्जा $= KE + PE = 0 - \frac{GMm}{R}$

$$\therefore \quad \text{पलायन ऊर्जा} = \frac{GMm}{R}$$

(ix) यदि किसी पिण्ड के लिए पलायन वेग प्रकाश के वेग के तुल्य है तो पिण्ड से कुछ भी पलायन नहीं होगा, यहाँ तक कि प्रकाश भी नहीं। ऐसे पिण्ड कृष्ण विवर (Black holes) कहलाते हैं।

कृष्ण विवर की त्रिज्या

$R = \frac{2GM}{C^2}$ [$C = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, जहाँ C प्रकाश का वेग है]

Problem 46. एक बालक पृथ्वी की सतह पर h ऊँचाई तक उछल सकता है। घनत्व d वाले उस गोले की त्रिज्या क्या होगी जिस पर अगर यह बालक उछले तो, गोले के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र के बाहर चला जाए

(a) $\left[\frac{4\pi}{3}\frac{Gd}{gh}\right]^{1/2}$ (b) $\left[\frac{4\pi}{3}\frac{gh}{Gd}\right]^{1/2}$ (c) $\left[\frac{3}{4\pi}\frac{gh}{Gd}\right]^{1/2}$ (d) $\left[\frac{3}{4\pi}\frac{Gd}{gh}\right]^{1/2}$

Solution : (c) चूँकि बालक पृथ्वी सतह पर h ऊँचाई तक उछल सकता है अतः उसके उछलने का वेग

$$v = \sqrt{2gh} \quad .....(i)$$

पलायन वेग $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2G}{R}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 .d\right)}$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से प्रश्नानुसार $\sqrt{2gh} = R\sqrt{\frac{8}{3}G\pi d} \Rightarrow R = \left[\frac{3}{4\pi}\frac{gh}{Gd}\right]^{1/2}$

Problem 47. किसी ग्रह के लिए पलायन वेग $11 km/s$ है। यदि उससे एक उपग्रह ऊर्ध्वाधर से 60^o का कोण बनाकर छोड़ा जाए तो पलायन वेग होगा [CBSE 1993; RPMT 1997; AIEEE 2003]

(a) $11 km/s$ (b) $11\sqrt{3}\ km/s$ (c) $\frac{11}{\sqrt{3}} km/s$ (d) $33 km/s$

Solution : (a) पलायन वेग, प्रक्षेपण कोण पर निर्भर नहीं करता।

Problem 48. पृथ्वी की सतह से पलायन वेग लगभग $11 km/s$ है। किसी अन्य ग्रह से जिसकी त्रिज्या, पृथ्वी की त्रिज्या की दोगुनी तथा औसत घनत्व पृथ्वी के समान हो, पलायन वेग होगा

[MP PMT 1987; UPSEAT 1999; AIIMS 2001; MP PET 2001, 2003]

(a) 22 *km/s* (b) 11 *km/s* (c) 5.5 *km/s* (d) 15.5 *km/s*

Solution : (a) $v_e = \sqrt{\frac{2Gm}{R}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi\rho G R^2}$ $\therefore v_e \propto R$ यदि ρ = नियतांक

$$\Rightarrow \quad \frac{v_e}{v_p} = \frac{R_e}{R_p}$$

$$\Rightarrow \quad v_p = v_e \cdot \frac{R_p}{R_e} = 11 \times \frac{2R_p}{R_p} \quad [\text{दिया है } R_p = 2R_e]$$

$$= 22 km/s$$

Problem 49. एक प्रक्षेप्य kv_e वेग से आकाश में, ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। (v_e पलायन वेग व $k < 1$) यदि वायु का प्रतिरोध नगण्य हो तो पृथ्वी के केन्द्र से वह अधिकतम ऊँचाई जहाँ तक यह जा सकता है

[Roorkee 1999; RPET 1999]

(a) $\frac{R}{k^2+1}$ (b) $\frac{R}{k^2-1}$ (c) $\frac{R}{1-k^2}$ (d) $\frac{R}{k+1}$

Solution : (c) ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त से,

सतह व अधिकतम ऊँचाई पर स्थितिज ऊर्जा में अंतर = प्रक्षेपण बिन्दु पर गतिज ऊर्जा

$$\Rightarrow \frac{mgh}{1+h/R} = \frac{1}{2}m(kv_e)^2 = \frac{1}{2}mk^2 v_e^2 = \frac{1}{2}mk^2(\sqrt{2gR})^2 \quad [\ v_e = \sqrt{2gR}\ ]$$

हल करने पर पृथ्वी की सतह से ऊँचाई $h = \frac{Rk^2}{1-k^2}$

अतः पृथ्वी के केन्द्र से ऊँचाई $r = R + h = R + \frac{Rk^2}{1-k^2} = \frac{R}{1-k^2}$.

Problem 50. यदि पृथ्वी की त्रिज्या 4% बढ़ जाए व औसत घनत्व समान रहे तो पलायन वेग [MP PET 1991; MP PMT 1995]

(a) 2% घट जाएगी (b) 2% बढ़ जाएगी (c) 4% घट जाएगी (d) 4% बढ़ जाएगी

Solution : (c) पलायन वेग $v_e \propto R\sqrt{\rho}$

$v_e \propto R$ यदि घनत्व नियत रहे।

अतः यदि त्रिज्या 4% घटेगी तो पलायन वेग भी 4% घटेगा।

Problem 51. एक रॉकेट (द्रव्यमान M) पृथ्वी की सतह से V वेग से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। यदि वायु का प्रतिरोध नगण्य हो तो रॉकेट द्वारा पृथ्वी की सतह से प्राप्त अधिकतम ऊँचाई [AMU 1995]

(a) $\frac{R}{\left(\frac{gR}{2v^2}-1\right)}$ (b) $R\left(\frac{gR}{2v^2}-1\right)$ (c) $\frac{R}{\left(\frac{2gR}{v^2}-1\right)}$ (d) $R\left(\frac{2gR}{v^2}-1\right)$

Solution : (c) पृथ्वी सतह पर गतिज ऊर्जा = रॉकेट की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mgh}{1+h/R} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{g}{\frac{1}{h}+\frac{1}{R}} \Rightarrow$

$\frac{1}{h}+\frac{1}{R} = \frac{2g}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{2g}{v^2} - \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{2gR - v^2}{v^2R} \Rightarrow h = \frac{v^2R}{2gR - v^2}$

$\Rightarrow h = \frac{R}{\left(\frac{2gR}{v^2}-1\right)}$

Problem 52. m द्रव्यमान का एक पिण्ड पृथ्वी की सतह से $4R_e$ ऊँचाई पर स्थित है। जहाँ R_e पृथ्वी की त्रिज्या है। पिण्ड को कितनी न्यूनतम ऊर्जा दी जाए कि यह पलायन कर जाए

(a) mgR_e (b) $2mgR_e$ (c) $\frac{mgR_e}{5}$ (d) $\frac{mgR_e}{16}$

Solution : (c) पृथ्वी की सतह से $4R_e$ दूरी पर स्थितिज ऊर्जा

$U = -\frac{mgR_e}{1+h/R_e} = -\frac{mgR_e}{1+4} = -\frac{mgR_e}{5}$

अतः पिण्ड को पलायन कराने के लिए न्यूनतम आवश्यक ऊर्जा $\frac{mgR_e}{5}$ होगी।

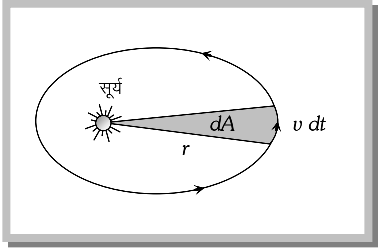
ग्रहों की गति सम्बन्धी केपलर के नियम

ग्रह वे खगोलीय पिण्ड है जो किसी तारे (सूर्य) के चारों ओर निश्चित कक्षाओं में परिभ्रमण करते हैं, सूर्य के नौ ग्रह हैं, बुध, शुक्र, पृथ्वी, मंगल, बृहस्पति, शनि, यूरेनस, नेप्च्यून तथा प्लूटो। इनमें बुध सूर्य के सबसे समीप व प्लूटो सबसे दूर है।

केपलर ने खगोलीय प्रेक्षणों के आधार पर सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति के निम्न तीन नियम प्रतिपादित किये।

(1) **प्रथम नियम (कक्षा का नियम) :** सभी ग्रह सूर्य के चारों ओर दीर्घ-वृत्ताकार कक्षाओं (elliptical orbits) में परिक्रमण करते हैं तथा सूर्य कक्षाओं के एक फोकस पर होता है।

(2) **द्वितीय नियम (क्षेत्रफल का नियम) :** किसी भी ग्रह को सूर्य से मिलाने वाली रेखा समान समयान्तरालों में समान क्षेत्रफल तय करती है अर्थात् ग्रह की क्षेत्रफलीय चाल नियत रहती है।

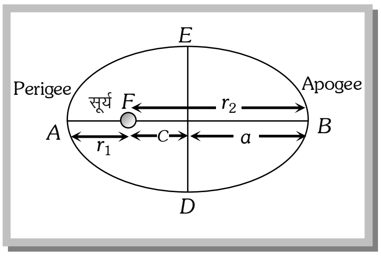


इस नियम के अनुसार जब ग्रह सूर्य से दूर होगा उसकी गति मंद होगी तथा जब ग्रह सूर्य के पास होगा उसकी गति तीव्र होगी। यह कोणीय संवेग संरक्षण नियम के अनुरूप है।

क्षेत्रीय वेग $= \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{r(vdt)}{dt} = \frac{1}{2}rv$

$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad [\; L = mvr \; ; \; rv = \frac{L}{m}]$

(3) **तृतीय नियम (परिक्रमण काल का नियम)** : किसी भी ग्रह का सूर्य के परितः परिक्रमणकाल (एक पूरा चक्कर लगाने का समय) का वर्ग, उसकी दीर्घवृत्ताकार कक्षा के अर्द्ध-दीर्घ अक्ष (Semi-major axis) की तृतीय घात (घन) के अनुक्रमानुपाती होती है।



$T^2 \propto a^3$ या $T^2 \propto \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3$; चित्र से, $AB = AF + FB$

$2a = r_1 + r_2 \quad \therefore a = \frac{r_1 + r_2}{2}$ जहाँ a = अर्द्ध दीर्घ अक्ष

r_1 = ग्रह की सूर्य से न्यूनतम दूरी (perigee)

r_2 = ग्रह की सूर्य से अधिकतम दूरी (apogee)

महत्वपूर्ण आँकड़े

ग्रह	अर्ध-दीर्घ अक्ष a (10^{10} meter)	काल T(year)	T^2/a^3 (10^{-34} year^2/meter^3)
बुध	5.79	0.241	2.99
शुक्र	10.8	0.615	3.00
पृथ्वी	15.0	1.00	2.96
मंगल	22.8	1.88	2.98
बृहस्पति	77.8	11.9	3.01
शनि	143	29.5	2.98
यूरेनस	287	84.0	2.98
नेप्च्यून	450	165	2.99
प्लूटो	590	248	2.99

Solar System

❑ केपलर के नियम उपग्रहों के लिए भी सत्य हैं।

उत्केन्द्रता के पदों में किसी ग्रह का वेग

ग्रह की न्यूनतम व अधिकतम दूरी पर कोणीय संवेग संरक्षण नियम से,

$$mv_p r_p = mv_a r_a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{1+e}{1-e} \qquad [\; r_p = a - c, \quad r_a = a + c \text{ व उत्केन्द्रता } e = \frac{c}{a}]$$

अब ग्रह की न्यूनतम व अधिकतम दूरी पर यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम से,

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GMm}{r_a} \Rightarrow v_p^2 - v_a^2 = 2GM\left[\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right]$$

$$\Rightarrow \quad v_a^2\left[\frac{r_a^2 - r_p^2}{r_p^2}\right] = 2GM\left[\frac{r_a - r_p}{r_a r_p}\right] \qquad \left[\because v_p = \frac{v_a r_a}{r_p}\right]$$

$$\Rightarrow \quad v_a^2 = \frac{2GM}{r_a + r_p}\left[\frac{r_p}{r_a}\right] \Rightarrow v_a^2 = \frac{2GM}{a}\left(\frac{a-c}{a+c}\right) = \frac{2GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$$

अतः सूर्य से अधिकतम व न्यूनतम दूरी पर ग्रह का वेग

$$v_a = \sqrt{\frac{2GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}, \qquad v_p = \sqrt{\frac{2GM}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}$$

- गुरुत्वीय बल एक केन्द्रीय बल है अतः ग्रह पर सूर्य के सापेक्ष बल आघूर्ण सदैव शून्य होगा। अतः किसी ग्रह या उपग्रह का कोणीय संवेग सदैव नियत होगा व कक्षा के आकार पर निर्भर नहीं करेगा।

Topperseducations.co.in

ग्रहों के कुछ गुण

	बुध	शुक्र	पृथ्वी	मंगल	बृहस्पति	शनि	यूरेनस	नेप्च्यून	प्लूटो
सूर्य से दूरी, 10^6 *km*	57.9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
परिक्रमण काल, वर्ष	0.241	0.615	1.00	1.88	11.9	29.5	84.0	165	248
कक्षीय वेग, *km/s*	47.9	35.0	29.8	24.1	13.1	9.64	6.81	5.43	4.74
विषुवत् रेखीय व्यास, *km*	4880	12100	12800	6790	143000	120000	51800	49500	2300
द्रव्यमान (पृथ्वी =1)	0.0558	0.815	1.000	0.107	318	95.1	14.5	17.2	0.002
घनत्व (जल =1)	5.60	5.20	5.52	3.95	1.31	0.704	1.21	1.67	2.03
सतह पर g का मान, m/s^2	3.78	8.60	9.78	3.72	22.9	9.05	7.77	11.0	0.5
पलायन वेग, *km/s*	4.3	10.3	11.2	5.0	59.5	35.6	21.2	23.6	1.1
ज्ञात उपग्रह	0	0	1	2	16+ring	18+rings	17+rings	8+rings	1

Problem 53. किसी ग्रह की सूर्य से दूरी, पृथ्वी की सूर्य से दूरी की 5 गुनी है। ग्रह का आवर्तकाल होगा [UPSEAT 2003]

(a) $5^{3/2}$ वर्ष (b) $5^{2/3}$ वर्ष (c) $5^{1/3}$ वर्ष (d) $5^{1/2}$ वर्ष

Solution : (a) केपलर के नियम से, $T \propto R^{3/2}$ $\therefore$ $T_{\text{ग्रह}} = (5)^{3/2} T_{\text{पृथ्वी}} = 5^{(3/2)} \times 1$ वर्ष $= 5^{3/2}$ वर्ष.

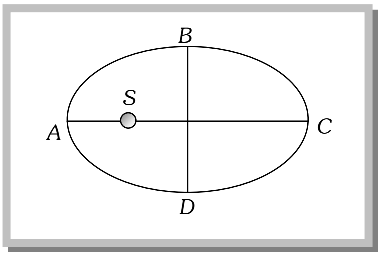
Problem 54. ग्रहीय गति में, किसी ग्रह के स्थिति सदिश की क्षेत्रीय चाल, कोणीय वेग (ω) पर निर्भर करती है। यदि ग्रह की सूर्य से दूरी (r) हो तो सही संबंध होगा [EAMCET 2003]

(a) $\frac{dA}{dt} \propto \omega r$ (b) $\frac{dA}{dt} \propto \omega^2 r$ (c) $\frac{dA}{dt} \propto \omega r^2$ (d) $\frac{dA}{dt} \propto \sqrt{\omega r}$

Solution : (c) $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{mvr}{2m} = \frac{1}{2}\omega r^2$ [$\because$ कोणीय संवेग $L = mvr$ व $v = r\omega$]

$\therefore \frac{dA}{dt} \propto \omega r^2$.

Problem 55. एक ग्रह सूर्य के चारों ओर दीर्घवृत्ताकार कक्षा में चित्रानुसार चक्कर लगा रहा है। निम्न में से सही है [UPSEAT 2002]



(a) DAB मार्ग तय करने में लगा समय BCD मार्ग तय करने में लगे समय से कम होगा

(b) DAB मार्ग तय करने में लगा समय BCD मार्ग तय करने में लगे समय से अधिक होगा

(c) CDA मार्ग तय करने में लगा समय ABC मार्ग तय करने में लगे समय से कम होगा

(d) CDA मार्ग तय करने में लगा समय ABC मार्ग तय करने में लगे समय से कम होगा

Solution : (a) जब ग्रह सूर्य के पास से गुजरता है, इसकी चाल बढ़ जाती है व जब सूर्य से दूर होता है इसकी चाल कम हो जाती है अतः DAB मार्ग तय करने में लगा समय BCD मार्ग तय करने में लगे समय से कम होगा।

Problem 56. सूर्य से नेप्च्यून (Neptune) व शनि (Saturn) की दूरियाँ क्रमशः 10^{13} व 10^{12} *meters* लगभग है। इनके परिक्रमण पथों को वृत्तीय माने तो परिक्रमण कालों का अनुपात होगा [NCERT 1975; CBSE PMT 1994; MP PET 2001]

(a) $\sqrt{10}$ (b) 100 (c) $10\sqrt{10}$ (d) $1/\sqrt{10}$

Solution : (c) केपलर के तृतीय नियम से, $T^2 \propto R^3$ $\therefore \frac{T_{\text{नेप्च्यून}}}{T_{\text{शनि}}} = \left(\frac{R_{\text{नेप्च्यून}}}{R_{\text{शनि}}}\right)^{3/2} = \left(\frac{10^{13}}{10^{12}}\right)^{3/2} = 10\sqrt{10}$

Problem 57. किसी धूमकेतु की सूर्य से अधिकतम व न्यूनतम दूरियाँ क्रमशः $8\times10^{12} m$ व $1.6\times10^{12} m$ हैं। जब वह सूर्य के निकटतम होता है, उसका वेग 60 *m/s* है, तो जब वह सूर्य से अधिकतम दूरी पर है उसका वेग होगा [Orissa JEE 2001]

(a) 12 (b) 60 (c) 112 (d) 6

Solution : (a) कोणीय संवेग संरक्षण के नियम से, $mv_{\min}r_{\max} = mv_{\max}r_{\min}$ = नियतांक

$\therefore v_{\min} = v_{\max}\times\frac{r_{\min}}{r_{\max}} = 60\times\left(\frac{1.6\times10^{12}}{8\times10^{12}}\right) = 12 m/s$

Problem 58. दो उपग्रहों A व B के द्रव्यमान क्रमशः m व $2m$ हैं और त्रिज्याऐं क्रमशः r व $2r$ हैं। उनके परिक्रमण कालों का अनुपात होगा [CBSE PMT 1993]

(a) 1 : 2 (b) 1 : 16 (c) 1 : 32 (d) $1 : 2\sqrt{2}$

Solution : (d) परिक्रमण काल उपग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता, मात्र त्रिज्या पर निर्भर करता है। अतः

केपलर के तृतीय नियम से, $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} = \left(\frac{r}{2r}\right)^{3/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Problem 59. एक ग्रह सूर्य के चारों ओर परिक्रमण कर रहा है। जब वह सूर्य के निकट d_1 दूरी पर स्थित एक बिन्दु P पर होता है, उसका वेग v_1 है। सूर्य से d_2 दूरी पर स्थित, एक अन्य बिन्दु Q पर ग्रह का वेग होगा [MP PMT 1987]

(a) $\frac{d_1^2 v_1}{d_2^2}$ (b) $\frac{d_2 v_1}{d_1}$ (c) $\frac{d_1 v_1}{d_2}$ (d) $\frac{d_2^2 v_1}{d_1^2}$

Solution : (c) कोणीय संवेग संरक्षण के नियम से, $mv_1d_1 = mv_2d_2$ $\therefore v_2 = \frac{d_1 v_1}{d_2}$

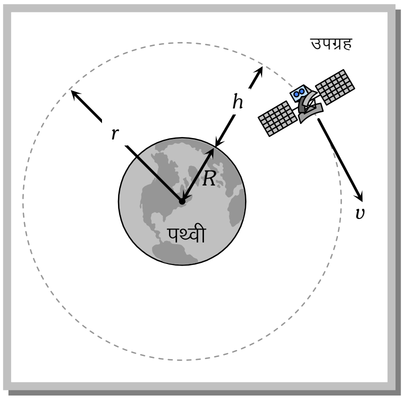
उपग्रह का कक्षीय वेग

वह कृत्रिम या प्राकृतिक पिण्ड जो गुरुत्वाकर्षण बल के प्रभाव में किसी ग्रह का परिक्रमण करता है, उपग्रह कहलाता है। चन्द्रमा पृथ्वी का एक प्राकृतिक उपग्रह है जबकि INSAT-1B पृथ्वी का एक कृत्रिम उपग्रह है।

कृत्रिम उपग्रह स्थापित करने की शर्त यह है कि उपग्रह की कक्षा का केन्द्र पृथ्वी के केन्द्र के संपाती होना चाहिए तथा उपग्रह को विषुवत् वृत्त के अनुदिश परिक्रमण करना चाहिए।

किसी उपग्रह को उसकी कक्षा में स्थापित करने के लिए आवश्यक वेग उसका कक्षीय वेग कहलाता है।

परिक्रमण के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, गुरुत्वाकर्षण बल प्रदान करता है।



$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} \qquad [\ GM = gR^2 \text{ व } r = R+h\ ]$$

Important points

(i) कक्षीय वेग उपग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता तथा इसकी दिशा सदैव कक्षा के स्पर्शरेखीय होती है अर्थात् यदि अलग-अलग द्रव्यमानों के उपग्रह समान कक्षा में परिक्रमण कर रहें हो तो उनके परिक्रमण काल समान होंगे।

(ii) कक्षीय वेग केन्द्रीय पिण्ड के द्रव्यमान व कक्षा की त्रिज्या पर निर्भर करता है।

(iii) एक दिये गये उपग्रह के लिए यदि कक्षा की त्रिज्या अधिक हो तो $\left(v \propto 1/\sqrt{r}\right)$ कक्षीय वेग कम होगा।

(iv) यदि उपग्रह पृथ्वी की सतह के समीप हो

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \quad \therefore\ v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} \qquad [\ h = 0 \text{ व } GM = gR^2\ ]$$

पृथ्वी के लिए $v = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} = 7.9\,km/s \approx 8\,km/sec$

(v) कक्षीय वेग व पलायन वेग में संबंध

पृथ्वी की सतह के निकट $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ $\qquad [\ v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\ ]$

$$\therefore \qquad v = \frac{v_e}{\sqrt{2}} \quad \text{या} \quad v_{escape} = \sqrt{2}\ v_{orbital}$$

अर्थात् यदि पृथ्वी के निकट परिक्रमण कर रहे, उपग्रह चाल की उसकी कक्षीय चाल $\sqrt{2}$ गुना (या 41% बढ़ा दे) कर दें तो वह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र से पलायन कर जाएगा।

(vi) यदि ग्रह व उपग्रह के मध्य बल $F \propto \frac{1}{r^n}$ के अनुसार परिवर्ती हो तो कक्षीय वेग $v \propto \frac{1}{\sqrt{r^n - 1}}$ के अनुसार परिवर्तित होगा।

Problem 60. दो उपग्रह A व B किसी ग्रह P के परितः क्रमशः $4R$ व R त्रिज्याओं के वृत्ताकार मार्गों पर घूम रहे हैं यदि A का वेग $3v$ हो तो, B का वेग होगा [MNR 1991; AIIMS 1995; UPSEAT 2000]

(a) $12\ v$ (b) $6\ v$ (c) $3/2\ v$ (d) $3/2\ v$

Solution : (b) उपग्रह का कक्षीय वेग $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ $\therefore\ v \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{r_A}{r_B}} \Rightarrow \frac{v_B}{3v} = \sqrt{\frac{4R}{R}} \Rightarrow v_B = 6v$

Problem 61. एक उपग्रह पृथ्वी के परितः वृत्तीय कक्षा में v वेग से परिक्रमण कर रहा है। यदि कक्षीय त्रिज्या 1% कम कर दी जाए तो उसकी चाल [MP PET 1996, 99, 2002]

(a) 1% बढ़ेगी (b) 0.5% बढ़ेगी (c) 1% कम होगी (d) 0.5% कम होगी

Solution : (b) कक्षीय वेग $v = \sqrt{\frac{Gm}{r}}$ $\therefore\ v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ [अर्थात् यदि r कम होतो v बढ़ेगा]

v में % परिवर्तन $= \frac{1}{2}$ (r में % परिवर्तन) $= \frac{1}{2}$ (1%) = 0.5% $\therefore$ कक्षीय वेग 0.5% बढ़ेगा।

Problem 62. यदि दो पिण्डों के मध्य गुरुत्वाकर्षण बल $1/R$ के समानुपाती हो (जहाँ R दोनों के मध्य दूरी) ओर एक पिण्ड इस बल के प्रभाव में वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण करें तो कक्षीय वेग निम्न में से किसके समानुपाती होगा

[CBSE PMT 1994; JIPMER 2001, 02]

(a) $1/R^2$ (b) R^0 (c) R^1 (d) $1/R$

Solution : (b) यदि $F \propto \frac{1}{R^n}$ तब $v \propto \frac{1}{\sqrt{R^{n-1}}}$; यहाँ $n = 1$ $\therefore v \propto \frac{1}{\sqrt{R^{1-1}}} \propto R^0$

Problem 63. पृथ्वी व चन्द्रमा के मध्य दूरी 384000 *km* है। यदि पृथ्वी का द्रव्यमान 6×10^{24} *kg* और $G = 6.67 \times 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$ हो तो चन्द्रमा का वेग (लगभग) होगा

[MH CET 2002]

(a) 1 *km / sec* (b) 4 *km / sec* (c) 8 *km / sec* (d) 11.2 *km / sec*

Solution : (a) कक्षीय वेग $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{38400 \times 10^3}}$ $v = 1.02\, km/sec = 1 km/sec$

उपग्रह का परिक्रमण काल

किसी उपग्रह द्वारा ग्रह के परितः एक परिक्रमा पूर्ण करने में लगा समय उसका परिक्रमण काल कहलाता है।

$$\therefore \quad T = \frac{\text{मार्ग की परिधि}}{\text{कक्षीय चाल}}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} \qquad \left[\ v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\ \right]$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} \qquad [\ GM = gR^2\ ]$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{3/2} \qquad [\ r = R+h\ ]$$

Important points

(i) सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ से स्पष्ट है कि परिक्रमण काल उपग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता परन्तु ग्रह के द्रव्यमान व कक्षा की त्रिज्या पर निर्भर करता है।

(ii) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

$$\Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \text{ अर्थात् } T^2 \propto r^3$$

जो कि केपलर के तृतीय नियम के अनुरूप है, यदि कक्षा दीर्घवृत्ताकार होतो $r = a$ अर्द्ध दीर्घ अक्ष।

(iii) पृथ्वी के निकट किसी उपग्रह का आवर्तकाल

सूत्र $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad [\ h = 0 \text{ व } GM = gR^2\ ]$$

पृथ्वी के लिए $R = 6400km$ व $g = 9.8m/s^2$

तब $T = 84.6\,\text{minute} \approx 1.4\ hr$

(iv) पृथ्वी के निकट किसी ग्रह का आवर्तकाल घनत्व के पदों में

सूत्र $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \frac{2\pi(R^3)^{1/2}}{\left[G.\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right]^{1/2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

(v) यदि ग्रह व उपग्रह के मध्य गुरुत्वीय बल $F \propto \frac{1}{r^n}$ के अनुरूप हो तो आवर्तकाल $T \propto r^{\frac{n+1}{2}}$ के अनुरूप होगा।

(vi) यदि विषुवत् रेखीय तल में कोई उपग्रह, पृथ्वी के घूर्णन की दिशा में (पश्चिम से पूर्व) घूम रहा हो तो पृथ्वी पर उपस्थित किसी प्रेक्षक के लिए उपग्रह का कोणीय वेग $(\omega_S - \omega_E)$ होगा व परिक्रमण काल (आभासी) ।

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s - \omega_E} = \frac{T_S T_E}{T_E - T_S} \qquad \left[\text{As } T = \frac{2\pi}{\omega}\right]$$

यदि $\omega_S = \omega_E$, $T = \infty$ अर्थात् उपग्रह, पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर दिखाई देगा। ऐसे उपग्रह भू-स्थायी उपग्रह कहलाते हैं।

Problem 64. एक उपग्रह 'R' त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में, जबकि दूसरा 1.02 R त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में, स्थापित किये गये हैं। उपग्रहों के परिक्रमण कालों में प्रतिशत अंतर होगा [EAMCET 2003]

(a) 0.7 (b) 1.0 (c) 1.5 (d) 3

Solution : (d) दूसरे उपग्रह की कक्षीय त्रिज्या पहले उपग्रह से 2% अधिक है।

तथा $T \propto (r)^{3/2}$, अतः परिक्रमण कालों में (%) अंतर $= \frac{3}{2}$ (त्रिज्याओं में % का अंतर)

$$= \frac{3}{2}(2\%) = 3\%.$$

Problem 65. पृथ्वी की सतह से R ऊँचाई पर परिक्रमण कर रहे उपग्रह का परिक्रमण काल होगा [g पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण R-पृथ्वी की त्रिज्या] [MP PMT 2002]

(a) $2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ (b) $4\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (c) $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (d) $8\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

Solution : (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+R)^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{8R}{g}} = 4\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ [$h = R$ (दिया है)]

Problem 66. पृथ्वी के एक उपग्रह S की कक्षीय त्रिज्या, संचार उपग्रह C की कक्षीय त्रिज्या की 4 गुनी है। S का आवर्तकाल होगा [MP PMT 1994; DCE 1999]

(a) 4 दिन (b) 8 दिन (c) 16 दिन (d) 32 दिन

Solution : (b) उपग्रह की कक्षीय त्रिज्या $r_s = 4r_c$ (दिया है)

केपलर के तृतीय नियम से, $T \propto r^{3/2}$ $\therefore \frac{T_s}{T_c} = \left(\frac{r_s}{s_c}\right)^{3/2} = (4)^{3/2} \Rightarrow T_s = 8T_c = 8 \times 1$ दिन $= 8$ दिन

Problem 67. एक प्रक्षेप्य अपने पथ से विचलित होकर, पृथ्वी के चारों ओर $9R$ त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण करने लगता है। [जहाँ R- पृथ्वी की त्रिज्या] तो उसका परिक्रमण काल होगा [RPET 1987, 88]

(a) $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (b) $27\times 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (c) $\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (d) $8\times 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

Solution : (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{(9R)^3}{gR^2}} = 2\pi(9)^{3/2}\sqrt{\frac{R}{g}} = 27\times 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ [$r = 9R$ (दिया है)]

Problem 68. एक उपग्रह A (द्रव्यमान m) पृथ्वी के परितः केन्द्र से 'r' ऊँचाई पर परिक्रमण कर रहा है। एक अन्य उपग्रह B (द्रव्यमान $2m$) पृथ्वी के परितः केन्द्र से $2r$ ऊँचाई पर परिक्रमण कर रहा है। उनके परिक्रमण कालों का अनुपात होगा [CBSE PMT 1993]

(a) 1 : 2 (b) 1 : 16 (c) 1 : 32 (d) $1:2\sqrt{2}$

Solution : (d) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} = \left(\frac{r}{2r}\right)^{3/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

उपग्रह की ऊँचाई

हम जानते है कि उपग्रह का परिक्रमण काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}}$

दोनों पक्षों का वर्ग करके पुनः व्यवस्थित करने पर, $\frac{gR^2T^2}{4\pi^2} = (R+h)^3$

$$\Rightarrow \qquad h = \left(\frac{T^2gR^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$$

अर्थात् परिक्रमण काल ज्ञात करके पृथ्वी तल से उपग्रह की ऊँचाई ज्ञात की जा सकती है।

Problem 69. यदि पृथ्वी की त्रिज्या ‘R’ और दिन की लम्बाई ‘T’ हो तो भू-स्थायी उपग्रह की ऊँचाई होगी [G – सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक, M – पृथ्वी का द्रव्यमान] [MP PMT 2002]

(a) $\left(\frac{4\pi^2GM}{T^2}\right)^{1/3}$ (b) $\left(\frac{4\pi GM}{R^2}\right)^{1/3} - R$ (c) $\left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$ (d) $\left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} + R$

Solution : (c) सूत्र $h = \left(\frac{T^2gR^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$ से $h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$ [$gR^2 = GM$]

Problem 70. पृथ्वी की सतह से कुछ ऊँचाई पर एक उपग्रह वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। यह एक परिक्रमा पूर्ण करने में $5.26\times10^3\, sec$ लेता है जबकि अभिकेन्द्रीय त्वरण $9.92 m/s^2$ है। पृथ्वी की सतह से उपग्रह की ऊँचाई होगी। (पृथ्वी की त्रिज्या $6.37\times10^6\ m$) [MP PET 1993]

(a) 70 km (b) 120 km (c) 170 km (d) 220 km

Solution : (c) अभिकेन्द्रीय त्वरण $(a_c) = \frac{v^2}{r}$ ....(i) व $T = \frac{2\pi r}{v}$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $r = \frac{a_cT^2}{4\pi^2}$

$$\Rightarrow R + h = \frac{9.32\times(5.26\times10^3)^2}{4\times\pi^2}$$

$$h = 6.53\times10^6 - R = 6.53\times10^6 - 6.37\times10^6 = 160\times10^3 m = 160 km \approx 170 km$$

भू-स्थायी उपग्रह

वह उपग्रह जो पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर दिखाई दे भूस्थायी, तुल्यकाली या संचार उपग्रह कहलाता है।

भू-स्थायी उपग्रह का पृथ्वी के किसी स्थान के सापेक्ष वेग शून्य होता है अतः यह स्थिर दिखाई देता है। वास्तव में इसका परिक्रमण काल 24 घंटा होता है।

भू-स्थायी उपग्रह की कक्षा को पार्किंग कक्षा (Parking orbit) कहते हैं।

Important points

(i) इसे भूमध्य रेखा के तल में, इस प्रकार घूमना चाहिए कि इसकी कक्षा का केन्द्र पृथ्वी के केन्द्र के संपाती होना चाहिए।

(ii) इसके घूर्णन की दिशा पृथ्वी के समान अर्थात् पश्चिम से पूर्व होना चाहिए।

(iii) इसका पृथ्वी के परितः परिक्रमण काल उतना ही होना चाहिए जितना पृथ्वी का अपने अक्ष के परितः घूर्णनकाल है।

अर्थात् $T = 24\ hr = 86400$ sec

(iv) भू-स्थायी उपग्रह की ऊँचाई

चूँकि $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}} = 24 hr$

G व M का मान रखने पर, $R + h = r = 42000\ km = 7R$

$\therefore$ पृथ्वी सतह से भू-स्थायी उपग्रह की ऊँचाई $h = 6R = 36000\, km$

(v) भू-स्थायी उपग्रह का कक्षीय वेग सूत्र $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

G व M का मान रखने पर $v = 3.08\ km/\text{sec}$

उपग्रह का कोणीय संवेग

उपग्रह का कोणीय संवेग $L = mvr$

$\Rightarrow \quad L = m\sqrt{\frac{GM}{r}}\, r \qquad \left[\ v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\ \right]$

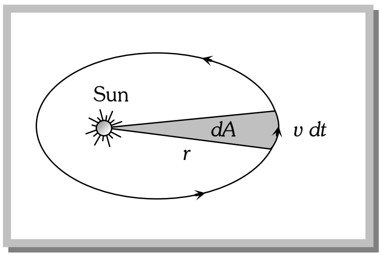
$\therefore \quad L = \sqrt{m^2 GMr}$

अर्थात् उपग्रह का कोणीय संवेग ग्रह व उपग्रह दोनों के द्रव्यमान व कक्षा की त्रिज्या पर निर्भर करता है।

Important points

(i) उपग्रह की कक्षीय गति के दौरान लगने वाला बल, केन्द्रीय बल है अतः बल आघूर्ण $= 0$ अतः उपग्रह का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

(ii) उपग्रह की कक्षीय गति के दौरान



क्षेत्रीय वेग $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{(r)(vdt)}{dt} = \frac{1}{2} rv$

$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad [\ L = mvr\ ]$

लेकिन चूँकि $L =$ नियतांक, $\therefore$ (dA/dt) = नियतांक जो कि केपलर का द्वितीय नियम है।

Problem 71. पृथ्वी केन्द्र से r दूरी पर परिक्रमण कर रहे उपग्रह का कोणीय संवेग L है यदि दूरी को बढ़ाकर $16r$ कर दें तो नया कोणीय संवेग होगा [MP PET 2003]

(a) $16\,L$ (b) $64\,L$ (c) $\frac{L}{4}$ (d) $4\,L$

Solution : (d) कोणीय संवेग $L = \sqrt{m^2 GMr}$ $\therefore$ $L \propto \sqrt{r}$

अर्थात् $\frac{L_2}{L_1} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{16r}{r}} = 4$

$L_2 = 4L_1 = 4L$

Problem 72. सूर्य के परितः परिक्रमण कर रहे m द्रव्यमान के ग्रह का कोणीय संवेग J है। तो उसके त्रिज्यीय सदिश का क्षेत्रीय वेग होगा

(a) $\frac{1}{2}mJ$ (b) $\frac{J}{2m}$ (c) $\frac{m}{2J}$ (d) $\frac{1}{2mJ}$

Solution : (b)

उपग्रह की ऊर्जा

जब कोई उपग्रह किसी ग्रह के परितः परिक्रमण करता है तो उसमें स्थितिज ऊर्जा (पृथ्वी के गुरुत्वीय बल के विरुद्ध, उसकी स्थिति के कारण) तथा गतिज ऊर्जा (कक्षीय गति के कारण) दोनों विद्यमान रहती हैं।

(1) **स्थितिज ऊर्जा** : $U = mV = \frac{-GMm}{r} = \frac{-L^2}{mr^2}$ $\left[V = \frac{-GM}{r}, L^2 = m^2GMr \right]$

(2) **गतिज ऊर्जा** : $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} = \frac{L^2}{2mr^2}$ $\left[v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \right]$

(3) **कुल ऊर्जा** : $E = U + K = \frac{-GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} = \frac{-GMm}{2r} = \frac{-L^2}{2mr^2}$

Important points

(i) किसी उपग्रह की गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा या कुल ऊर्जा उपग्रह व केन्द्रीय पिण्ड दोनों को द्रव्यमान पर तथा कक्षा की त्रिज्या पर निर्भर करती है।

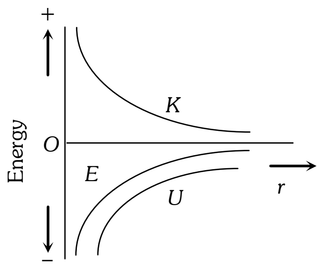
(ii) उपरोक्त व्यंजकों से स्पष्ट है कि

गतिज ऊर्जा $(K) = -$ (कुल ऊर्जा)

स्थितिज ऊर्जा $(U) = 2$ (कुल ऊर्जा)

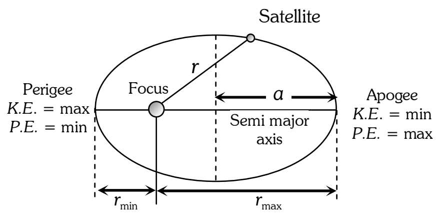
स्थितिज ऊर्जा $(K) = -2$ (गतिज ऊर्जा)

(iii) उपग्रह के लिए ऊर्जा वितरण ग्राफ



(A)

(iv) दीर्घवृत्तीय कक्षा में ऊर्जा वितरण



(B)

(v) यदि उपग्रह की कक्षा दीर्घवृत्ताकार हो

(a) कुल ऊर्जा $(E) = \frac{-GMm}{2a} =$ नियतांक; जहाँ a अर्द्ध-दीर्घअक्ष

(b) जब उपग्रह केन्द्रीय पिण्ड के समीप होगा (at perigee) उसकी गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी तथा जब वह केन्द्रीय पिण्ड से दूर होगा (at apogee) उसकी गतिज ऊर्जा न्यूनतम होगी।

(c) स्थितिज ऊर्जा तब न्यूनतम होगी, जब गतिज ऊर्जा अधिकतम हो अर्थात् केन्द्रीय पिण्ड के समीप (at perigee) व स्थितिज ऊर्जा तब अधिकतम होगी जब गतिज ऊर्जा न्यूनतम हो अर्थात् केन्द्रीय पिण्ड से दूर (at apogee)

(vi) **बंधन ऊर्जा** : किसी उपग्रह की अपनी कक्षा में कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है; ऋणात्मक ऊर्जा होने का अर्थ है कि उपग्रह केन्द्रीय पिण्ड से किसी आकर्षण बल द्वारा बँधा है अर्थात् उपग्रह को इस बंधन से मुक्त कराकर परिक्रमण कक्षा से अनंत तक ले जाने के लिए ऊर्जा की आवश्यकता है। यह आवश्यक ऊर्जा ही बंधन ऊर्जा कहलाती है अर्थात् बंधन ऊर्जा (B.E.) $= -E = \frac{GMm}{2r}$

उपग्रह का कक्ष परिवर्तन

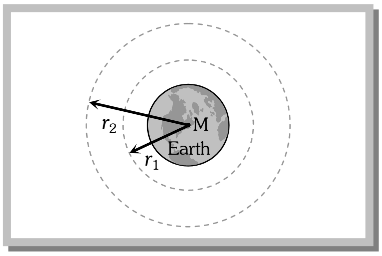
जब उपग्रह को उच्च कक्षा $(r_2 > r_1)$ में स्थानांतरित करें तो उससे संबंधित राशियों के मान में परिवर्तन निम्न सारणी में प्रदर्शित है।

राशि	परिवर्तन	r से संबंध
कक्षीय वेग	घटेगा	$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$
परिक्रमण काल	बढ़ेगा	$T \propto r^{3/2}$
रैखिक संवेग	घटेगा	$P \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$
कोणीय संवेग	बढ़ेगा	$L \propto \sqrt{r}$
गतिज ऊर्जा	घटेगी	$K \propto \frac{1}{r}$
स्थितिज ऊर्जा	बढ़ेगी	$U \propto -\frac{1}{r}$
कुल ऊर्जा	बढ़ेगी	$E \propto -\frac{1}{r}$
बंधन ऊर्जा	घटेगी	$BE \propto \frac{1}{r}$

❑ कक्ष परिवर्तन में किया गया कार्य $W = E_2 - E_1$

$$W = \left(-\frac{GMm}{2r_2}\right) - \left(-\frac{GMm}{2r_1}\right)$$

$$W = \frac{GMm}{2}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$



Problem 73. पृथ्वी तल से $6.4 \times 10^6\ m$ की ऊँचाई पर परिक्रमण कर रहे, 'm' द्रव्यमान वाले उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा [AIIMS 2000; CBSE PMT 2001; BHU 2001]

(a) $-0.5\,mgR_e$ (b) $-mgR_e$ (c) $-2\,mgR_e$ (d) $4\,mgR_e$

Solution : (a) स्थितिज ऊर्जा $= -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R_e + h} = -\frac{GMm}{2R_e}$ [$h = R_e$ (दिया है)]

$\therefore$ स्थितिज ऊर्जा $= -\frac{gR_e^2 m}{2R_e} = -0.5mgR_e$ [$GM = gR^2$]

Problem 74. किसी उपग्रह का परिक्रमण काल T हो तो, उसकी गतिज ऊर्जा समानुपाती होगी [BHU 1995]

(a) $\frac{1}{T}$ (b) $\frac{1}{T^2}$ (c) $\frac{1}{T^3}$ (d) $T^{-2/3}$

Solution : (d) परिक्रमण काल $T \propto r^{3/2} \Rightarrow r \propto T^{2/3}$ व गतिज ऊर्जा $\propto \frac{1}{r} \propto \frac{1}{T^{2/3}} \propto T^{-2/3}$

Problem 75. दो उपग्रह R व $3R$ ऊँचाईयों पर पृथ्वी का परिक्रमण कर रहे हैं (जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या) उनकी गतिज ऊर्जाओं में अनुपात होगा

(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

Solution : (a) $r_1 = R + h_1 = R + R = 2R$ व $r_2 = R + h_2 = R + 3R = 4R$

गतिज ऊर्जा $\propto \frac{1}{r}$ $\therefore \frac{(KE)_1}{(KE)_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{4R}{2R} = \frac{2}{1}$

भारहीनता

वस्तु का भार वह आकर्षण बल है, जिससे वह पृथ्वी के केन्द्र की ओर आकर्षित होती है। जब वस्तु पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर होती है उसका भार गुरूत्व के तुल्य होता है। वस्तु के इस भार को स्थैतिक या वास्तविक भार कहते हैं।

हमें अपने भार (जो गुरूत्व) है का अहसास तब होता है जब कोई अन्य वस्तु इसका विरोध करती है। वास्तव में, किसी पिण्ड के भार मापने का रहस्य यह है कि जब पिण्ड तौलने वाली मशीन पर रखा जाता है तो मशीन भार का विरोध करती है। तौलने वाली मशीन का वस्तु पर प्रतिक्रिया बल वस्तु के भार की माप बताता है।

भारहीनता का अनुभव निम्न परिस्थितियों में किया जा सकता है।

(1) जब वस्तु गुरूत्व के अधीन मुक्त रूप से गिरे : उदाहरण के लिए, मुक्त रूप से गिरती लिफ्ट या वायुयान के नीचे उतरते समय हमें भारहीनता का अनुभव होता है।

(2) जब कोई उपग्रह पृथ्वी के परित: अपनी कक्षा में परिक्रमण करे : अंतरिक्ष यात्रियों के लिए भारहीनता की स्थिति कई गंभीर समस्याऐं पैदा करती है। जैसे उन्हें अपनी गति नियंत्रित करने में कठिनाई होती है व उपग्रह हर वस्तु को ठीक से बांध कर रखना पड़ता है। अंतरिक्ष यान में कृत्रिम गुरूत्व का निर्माण इस समस्या का हल है।

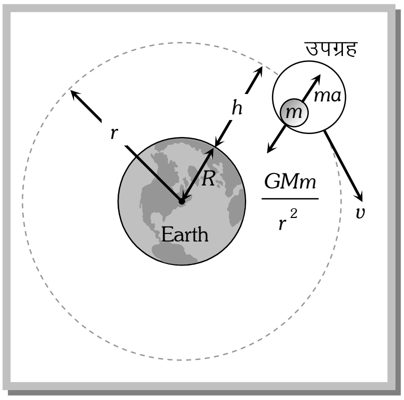
(3) जब वस्तु बाह्य अंतरिक्ष में शून्य बिन्दु पर हो : यदि किसी पिण्ड को पृथ्वी व चन्द्रमा के मध्य, पृथ्वी से प्रक्षेपित किया जाए तो पृथ्वी से दूर जाने पर, उस पर पृथ्वी का आकर्षण बल घटेगा जबकि चन्द्रमा का बढ़ता जाएगा। एक विशेष स्थिति में, दोनों बल बराबर व विपरीत हो जाएगें व वस्तु पर कुल बल शून्य हो जाएगा। इस बिन्दु को शून्य बिन्दु कहेंगे व इस पर वस्तु भारहीनता का अनुभव करेगी।

Topperseducations.co.in

उपग्रह में भारहीनता

कृत्रिम उपग्रह का अपना गुरूत्व नहीं होता वह पृथ्वी के गुरूत्व के प्रभाव में उसके परित: परिक्रमण करता है। पृथ्वी के केन्द्र की ओर उपग्रह का त्वरण $\frac{GM}{r^2}$ होता है।

यदि पृथ्वी का परिभ्रमण कर रहे किसी उपग्रह की सतह पर m द्रव्यमान का एक पिण्ड रखें तब पिण्ड पर निम्न बल लगेंगे।



(i) पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण $= \frac{GMm}{r^2}$

(ii) सतह का प्रतिक्रिया बल $= R$

अतः न्यूटन के द्वितीय नियम से, $\frac{GmM}{r^2} - R = m\,a$

$$\frac{GmM}{r^2} - R = m\left(\frac{GM}{r^2}\right)$$

$$\therefore \quad R = 0$$

अतः उपग्रह की सतह पिण्ड पर कोई बल आरोपित नहीं करेगा अतः उसका आभासी भार शून्य होगा।

पिण्ड को उपग्रह में विराम अवस्था ठहरने के लिए किसी सहारे की आवश्यकता नहीं है, वह प्रत्येक स्थिति में एकसमान अनुभव करेगा। यही स्थिति भारहीनता कही जाती है।

Important points

(i) भारहीनता की स्थिति में अपनी गति नियंत्रित करना कठिन होता है, भार के अभाव में हम मुक्त रूप से तैरेगें। एक स्थान से दूसरे स्थान तक जाने के लिए दीवारों या स्थायी वस्तुओं को धक्का देना पड़ेगा।

(ii) चूँकि प्रत्येक वस्तु मुक्त रूप से गिर रही है अतः वस्तुएँ एक दूसरे के सापेक्ष विराम में रहेगी अर्थात् यदि किसी वस्तु के नीचे से टेबल हटा लें तब भी वस्तु अपनी स्थिति में (बिना किसी सहारे के) बनी रहेगी।

(iii) यदि पानी से भरे ग्लास को उल्टा करके, हटा लें तो पानी ग्लास के आकार में तैरने लगेगा, पृष्ठ तनाव के कारण बहेगा नहीं।

(iv) यदि माचिस जलायी जाए तो उसका शीर्ष तो जल जाएगा परन्तु काड़ी (stick) नहीं जलेगी, क्योंकि भारहीनता की स्थिति में संवहन धाराऐं नहीं बह सकेंगी जो दहन के लिए ऑक्सीजन ले जाती हैं।

(v) यदि हम सरल लोलक का प्रयोग करना चाहे तो, लोलक दोलन नहीं करेगा क्योंकि इस स्थिति में, कोई प्रत्यानयन बल आघूर्ण उपस्थित नहीं होगा। अतः $T = 2\pi\sqrt{(L/g')} = \infty$ [$g' = 0$]

(vi) भारहीनता का अनुभव तभी किया जा सकता है जब उपग्रह का द्रव्यमान नगण्य हो व वह अपना गुरूत्व उत्पन्न न करे।

जैसे चन्द्रमा, पृथ्वी का उपग्रह है परन्तु वह अपने स्वयं के द्रव्यमान के कारण अपनी सतह पर रखी वस्तुओं पर गुरुत्वाकर्षण का बल लगाता है अर्थात् चन्द्रमा की सतह पर किसी वस्तु का भार शून्य नहीं होगा।

Problem 76. मुक्त रूप से परिक्रमण कर रहे उपग्रह में सरल लोलक का आवर्तकाल होगा [CPMT 1984; AFMC 2002]

(a) शून्य (b) 2 *sec* (c) 3 *sec* (d) अनंत

Solution : (d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{0}} = \infty$ [उपग्रह में $g' = 0$]

Problem 77. पृथ्वी का परिक्रमण कर रहे कृत्रिम उपग्रह में अंतरिक्ष यात्री का भार होगा [BHU 1999]

(a) शून्य (b) पृथ्वी पर भार के तुल्य

(c) पृथ्वी पर भार से ज्यादा (d) पृथ्वी पर भार से कम

Solution : (a)

Problem 78. पृथ्वी की सतह से 120 *km* की ऊँचाई पर परिक्रमण कर रहे अंतरिक्ष यान से एक गेंद गिरायी जाती है। तो गेंद [CBSE 1996; CPMT 2001; BHU 1999]

(a) वेग v से अंतरिक्ष यान की कक्षा में लगातार घूमती रहेगी

(b) अंतरिक्ष यान से स्पर्शरेखीय दिशा में उसी वेग से गति करेगी

(c) धीरे-धीरे पृथ्वी पर गिर जाएगी

(d) अंतरिक्ष में कहीं दूर चली जाएगी

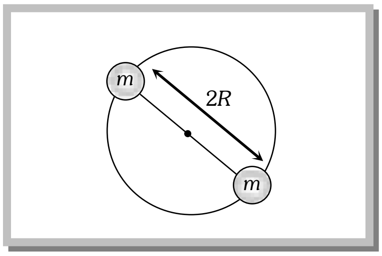
Solution : (a) क्योंकि गेंद का प्रारम्भिक स्पर्शरेखीय वेग यान के वेग के तुल्य होगा। अतः वह भारहीनता का अनुभव करेगी।

Problem 79. समान द्रव्यमान के दो पिण्ड, परस्पर गुरुत्वाकर्षण बल के प्रभाव में R त्रिज्या के वृत्त में घूम रहें हैं। प्रत्येक की चाल हेागी [CBSE PMT 1995]

(a) $v = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{1}{Gm}}$ (b) $v = \sqrt{\frac{Gm}{2R}}$ (c) $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{R}}$ (d) $v = \sqrt{\frac{4Gm}{R}}$

Solution : (c) दोनों पिण्ड R त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर व्यासतः विपरीत स्थिति में घूमेगें। उनके मध्य गुरुत्वाकर्षण बल आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करेगा।

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{Gmm}{(2R)^2} \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{R}}$$



Problem 80. दुकानों में भार मापने के लिए प्रायः दो प्रकार की तुलाऐं भौतिक तुलाएँ (beam balances) तथा स्प्रिंग तुलाऐं प्रयुक्त की जाती है। यदि हम चन्द्रमा पर हो तो भार मापने के लिए प्रयुक्त करेंगे [AIIMS 1992]

(a) सिर्फ भौतिक तुला, बिना किसी परिवर्तन के

(b) सिर्फ स्प्रिंग तुला, बिना किसी परिवर्तन के

(c) दोनों तुलाऐं, बिना किसी परिवर्तन के

(d) बिना परिवर्तन किये कोई भी तुला प्रयोग नहीं करेंगे

Solution : (a) चन्द्रमा पर 'g' का मान कम हो जाएगा परन्तु भौतिक तुला के दोनों पलड़ों (Pans) पर पड़ने वाला g का प्रभाव एक दूसरे को निरस्त कर देगा। जबकि स्प्रिंग तुला पर मापा गया भार पृथ्वी पर मापे गये भार से कम होगा।

Problem 81. पृथ्वी से चन्द्रमा तक तथा वापसी की यात्रा में, अंतरिक्ष यान द्वारा किसके प्रभाव के विरुद्ध कार्य करने के लिए अत्यधिक ऊर्जा की आवश्यकता होगी [CBSE PMT 1991]

(a) उड़ान प्रारम्भ भरते समय पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण के

(b) चंद्रमा की सतह पर उतरते समय चन्द्रमा के गुरुत्वाकर्षण के

(c) चन्द्रमा से उड़ान भरते समय चन्द्रमा के गुरुत्वाकर्षण के

(d) उस बिन्दु के जहाँ पृथ्वी तथा चन्द्रमा के गुरुत्व एक दूसरे को निरस्त करें।

Solution : (a)

Problem 82. यदि पृथ्वी की त्रिज्या सिकुड़कर वर्तमान त्रिज्या की $\frac{1}{n}$ हो जाए तो दिन की लम्बाई लगभग हो जाएगी

(a) $\frac{24}{n}h$ (b) $\frac{24}{n^2}h$ (c) $24n\ h$ (d) $24n^2\ h$

Solution : (b) कोणीय संवेग संरक्षण के नियम से, $L = I\omega = = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T} =$ नियतांक $\therefore T \propto R^2$ [यदि M नियत रहे]

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{R/n}{R}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow T_2 = \frac{24}{n^2}hr \qquad [\ T_1 = 24\,hr].$$

Problem 83. h ऊँचाई से छोड़ा गया पिण्ड पृथ्वी की सतह तक पहुँचने में t समय लेता है। यदि समान पिण्ड, समान ऊँचाई से चन्द्रमा की सतह पर छोड़ा जाए तो चन्द्रमा की सतह तक पहुँचने में लगा समय होगा

(a) t (b) $6t$ (c) $\sqrt{6}t$ (d) $\frac{t}{6}$

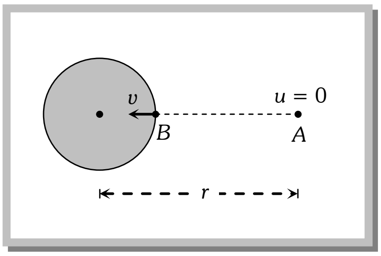
Solution : (c) यदि पिण्ड h ऊँचाई से मुक्त रूप से गिरे तो सतह तक पहुँचने में लगा समय

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \frac{t_{moon}}{t_{earth}} = \sqrt{\frac{g_{earth}}{g_{moon}}} = \sqrt{6} \Rightarrow t_{moon} = \sqrt{6}\ t.$$

Problem 84. एक उपग्रह v_0 कक्षीय वेग से पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमा कर रहा है। यदि वह अचानक रुक जाए तो पृथ्वी की सतह से किस वेग से टकराएगा

(a) $\frac{v_e^2}{v_0}$ (b) v_0 (c) $\sqrt{v_e^2 - v_0^2}$ (d) $\sqrt{v_e^2 - 2v_0^2}$

Solution : (d) बिन्दु A व B पर ऊर्जा संरक्षण के नियम से,



$$-\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right); \ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{r}$$

$$v^2 = \frac{2Gm}{R} - \frac{2Gm}{r} = v_e^2 - 2v_0^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_e^2 - 2v_0^2}$$

[पलायन वेग $v_e = \sqrt{\frac{2Gm}{R}}$ व कक्षीय वेग $v_0 = \sqrt{\frac{Gm}{r}}$]

Problem 85. किसी ग्रह पलायन वेग v_e है। यदि ग्रह के व्यास के परितः एक सुरंग खोदी जाए और उसमें एक छोटा पिण्ड डाल दिया जाए तो पिण्ड के केन्द्र पहुँचने पर उसका वेग होगा

(a) v_e (b) $\frac{v_e}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{v_e}{2}$ (d) शून्य

Solution : (b) पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय विभव $V_s = -\frac{GM}{R}$

पृथ्वी के केन्द्र पर गुरुत्वीय विभव $V_c = -\frac{3GM}{2R}$

ऊर्जा संरक्षण के नियम से, $\frac{1}{2}mv^2 = m(V_s - V_c)$

$$v^2 = 2\frac{GM}{R}\left(\frac{3}{2}-1\right) = \frac{GM}{R} = gR = \frac{v_e^2}{2} \quad [\;\; v_e = \sqrt{2gR}\,]$$

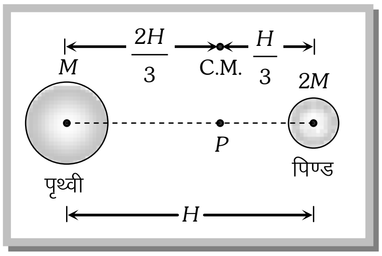
$$\therefore\; v = \frac{v_e}{\sqrt{2}}$$

Problem 86. अत्यधिक घनत्व वाले पदार्थ का एक छोटा पिण्ड, जिसका द्रव्यमान पृथ्वी का दोगुना परन्तु आकार तुलनात्मक रूप से छोटा है। विराम से ऊँचाई $H << R$ से गिरता है तो पृथ्वी की सतह तक आने में लगा समय t होगा

(a) $\sqrt{2H/g}$ (b) $\sqrt{H/g}$ (c) $\sqrt{2H/3g}$ (d) $\sqrt{4H/3g}$

Solution : (c) चूँकि पिण्ड व पृथ्वी के द्रव्यमान तुलनीय है, अतः वह दोनों अपने स्थिर द्रव्यमान केन्द्र की ओर गति करेंगे।

$2m$ द्रव्यमान का पिण्ड $\frac{H}{3}$ दूरी चलेगा।



पृथ्वी की सतह तक पहुँचने में लगा समय $= \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2H/3}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$