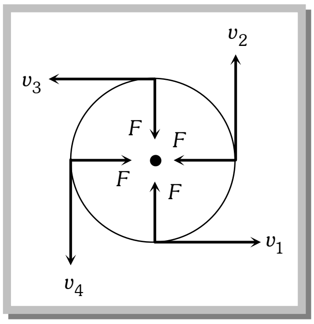
वृत्तीय गति



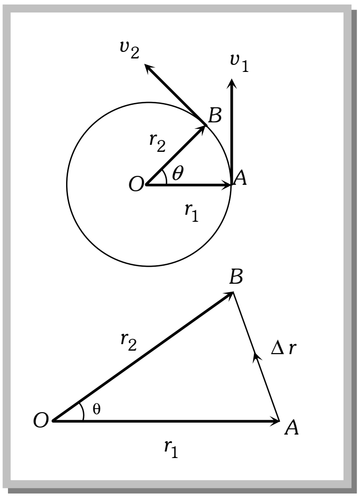
वृत्तीय गति द्विविमीय गति का एक महत्वपूर्ण उदाहरण है। वस्तु को वृत्तीय गति देने के लिए इसे कुछ प्रारम्भिक वेग देना चाहिए तथा इस पर लगने वाला बल तात्क्षणिक वेग के लम्बवत् होना चाहिए।

चूँकि यह बल, प्रारम्भिक वेग के कारण विस्थापन के लम्बवत् होता है अतः कण पर बल द्वारा कोई कार्य नहीं किया जाता। अतः इसकी गतिज ऊर्जा और चाल नियत रहती है, परन्तु बल एवं वेग की परस्पर क्रिया के कारण कण परिणामी पथ गति करता है। जो कि एक वृत्त है। वृत्तीय गति का दो प्रकार से अध्ययन कर सकते हैं, एकसमान वृत्तीय गति तथा असमान वृत्तीय गति।

वृत्तीय गति के चर

(1) **विस्थापन तथा दूरी** : वृत्तीय गति करता हुआ कोई कण t समय में स्थिति A से B तक केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है। हम देखते हैं कि स्थिति सदिश r का परिमाण (अर्थात् वृत्त की त्रिज्या के बराबर) नियत बना रहता है। अर्थात् $|r_1| = |r_2| = r$ तथा स्थिति सदिश की दिशा समय–समय पर परिवर्तित होती रहती है।

(i) विस्थापन : स्थिति में परिवर्तन या स्थिति A से स्थिति B तक कण का विस्थापन Δr, (चित्रानुसार)



$$\Delta r = r_2 - r_1$$

$$\Rightarrow \Delta r = |\Delta r| = |r_2 - \bar{r}_1| \qquad \Delta r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta}$$

$r_1 = r_2 = r$ रखने पर

$$\Delta r = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r.r\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \Delta r = \sqrt{2r^2(1-\cos\theta)} = \sqrt{2r^2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Delta r = 2r\sin\frac{\theta}{2}$$

(ii) दूरी : t समय में कण द्वारा चली गई दूरी

$$d = \text{चाप } AB \text{ की लम्बाई} = r\,\theta$$

(iii) दूरी तथा विस्थापन का अनुपात : $\dfrac{d}{\Delta r} = \dfrac{r\theta}{2r\sin\theta/2} = \dfrac{\theta}{2}\text{cosec}(\theta/2)$

Problem 80. एक कण r त्रिज्या के वृत्त पर गति कर रहा है। इसके द्वारा अर्द्ध वृत्त पूर्ण करने में तय दूरी है

(a) r (b) πr (c) $2\pi r$ (d) शून्य

Solution : (b) कण द्वारा चली गई दूरी = अर्द्ध परिधि = πr

Problem 81. एक खिलाड़ी 10 m त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर 40 sec सैकण्ड में एक चक्कर लगा लेता है। इसके द्वारा 2 मिनिट 20 सैकण्ड में चली दूरी है [Kerala PMT 2002]

(a) 70 m (b) 140 m (c) 110 m (d) 220 m

Solution : (d) चक्करों की संख्या $(n) = \frac{\text{गति का कुल समय}}{\text{आवर्तकाल}} = \frac{140\,sec}{40\,sec} = 3.5$

खिलाड़ी द्वारा चक्कर में चली गई दूरी $n = n(2\pi r) = 3.5(2\pi r) = 3.5 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 10 = 220\,m.$

Problem 82. एक पहिया 2000 चक्करों में 9.5 *km* दूरी तय करता है। पहिये का व्यास है [RPMT 1999; BHU 000]

(a) 15 *m* (b) 7.5 *m* (c) 1.5 *m* (d) 7.5 *m*

Solution : (c) दूरी $= n(2\pi r) \Rightarrow 9.5 \times 10^3 = 2000 \times (\pi D) \Rightarrow D = \frac{9.5 \times 10^3}{2000 \times \pi} = 1.5\,m.$

(2) **कोणीय विस्थापन** (θ) : वृत्त पर गतिमान कोई वस्तु किसी निर्देश रेखा से जो कोण बनाती है उसे कोणीय विस्थापन कहते हैं।

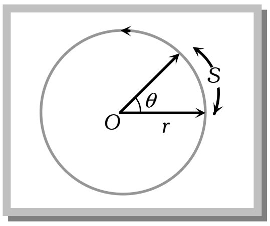
(i) विमाएँ = $[M^0L^0T^0]$ (चूँकि $\theta =$ चाप / त्रिज्या)

(ii) इकाई = रेडियन या डिग्री। इसे कभी–कभी चक्रण की संख्या के पदों में भी व्यक्त किया जाता है।

(iii) 2π रेडियन $= 360^o = 1$

(iv) कोणीय विस्थापन एक अक्षीय सदिश राशि है।

इसकी दिशा दाँयें हाथ के नियम द्वारा दी जा सकती है। यदि कण तल में दक्षिणावर्त (Clockwise) दिशा में घूमता है तो कोणीय विस्थापन की दिशा तल के लंबवत् अंदर की ओर तथा यदि कण वामावर्त(Anticlockwise) दिशा में घूमता है तो इसकी दिशा तल के लंबवत् बाहर की ओर होती है।



(v) रेखीय विस्थापन तथा कोणीय विस्थापन में सम्बन्ध $\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}$

या $s = r\theta$

Problem 83. एक पहिया 3000 *rpm* की नियत चाल से घूर्णन कर रहा है। इसकी धुरी द्वारा एक सैकण्ड में बनाया गया कोण है

(a) 2 π (b) 30 π (c) 100 π (d) 3000 π

Solution : (c) कोणीय चाल $= 3000\,rpm = 50\,rps = 50 \times 2\pi\,rad/sec = 100\pi\,rad/sec$

अर्थात् धुरी द्वारा एक सैकण्ड में बनाया गया कोण 100π रेडियन होगा।

Problem 84. एक कण 2 *cm* त्रिज्या के वृत्तीय पथ में 1.5 चक्कर लगाता है। कण का कोणीय विस्थापन होगा (रेडियन में)

(a) 6π (b) 3π (c) 2π (d) π

Solution : (b) 1 चक्रण का अर्थ 2π रेडियन कोणीय विस्थापन से है। $\therefore 1.5$ चक्रण का अर्थ $1.5 \times 2\pi = 3\pi$ रेडियन होगा।

(3) **कोणीय वेग** (ω) : वस्तु के कोणीय विस्थापन में समय के सापेक्ष परिवर्तन की दर को कोणीय वेग कहते हैं।

(i) कोणीय वेग $\omega = \frac{\text{बनाया गया कोण}}{\text{लिया गया समय}} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

$\therefore \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$

(ii) विमाएँ : $[M^0L^0T^{-1}]$

(iii) इकाई : रेडियन प्रति सैकण्ड($rad.s^{-1}$) या डिग्री प्रति सैकण्ड

(iv) कोणीय वेग अक्षीय सदिश है।

(v) कोणीय वेग तथा रेखीय वेग में सम्बन्ध : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

इसकी दिशा $\Delta\theta$ की दिशा में होती है। वृत्तीय पथ पर बिन्दु के वामावर्त घूर्णन के लिए, ω की दिशा दाँयें हाथ के नियम से वृत्तीय अक्ष के अनुदिश ऊपर की ओर होगी। वृत्ताकार मार्ग में बिन्दु के दक्षिणावर्त घूर्णन में, ω की दिशा वृत्तीय मार्ग के अनुदिश तथा नीचे की ओर होती है।

- यह महत्वपूर्ण तथ्य है, कि कोई भी वस्तु वास्तव में कोणीय वेग सदिश $\vec{\omega}$ की दिशा में गति नहीं करती। $\vec{\omega}$ की दिशा केवल यह दर्शाती है, कि घूर्णी गति उस समतल में होती है, जो इसके अभिलंबवत् होता है।

(vi) एकसमान वृत्तीय गति के लिए ω नियत रहता है, जबकि असमान वृत्तीय गति में ω समय के साथ परिवर्तित होता है।

Problem 85. एक स्कूटर 100 *m* त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग पर 10 *m/s* के वेग से गति कर रहा है। स्कूटर का कोणीय वेग होगा [Pb. PMT 2002]

(a) 0.01 *rad/s* (b) 0.1 *rad/s* (c) 1 *rad/s* (d) 10 *rad/s*

Solution : (b) $\omega = \frac{v}{r} = \frac{10}{100} = 0.1\, rad/sec$

Problem 86. किसी घड़ी के मिनट के काँटे का कोणीय वेग तथा पृथ्वी के अपनी अक्ष के परितः घूर्णन के कोणीय वेगों का अनुपात होगा

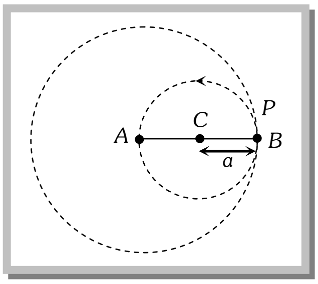
(a) 12 (b) 6 (c) 24 (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (c) $\omega_{\text{मिनिट काँटा}} = \frac{2\pi}{60}\frac{rad}{\min}$ और $\omega_{\text{पृथ्वी}} = \frac{2\pi}{24}\frac{Rad}{hr} = \frac{2\pi}{24\times 60}\frac{rad}{\min}$ $\therefore \frac{\omega_{\text{मिनिट काँटा}}}{\omega_{\text{पृथ्वी}}} = 24:1$

Problem 87. एक कण *P*, '*a*' त्रिज्या के वृत्त में एकसमान चाल *v* से चक्कर लगा रहा है। *C* वृत्त का केन्द्र है तथा *AB* वृत्त का व्यास है। *B* से गुजरते समय *A* तथा *C* के सापेक्ष *P* कोणीय वेगों का अनुपात होगा [NCERT 1982]

(a) 1 : 1 (b) 1 : 2 (c) 2 : 1 (d) 4 : 1

Solution : (b) *A* के सापेक्ष *P* का कोणीय वेग



$\omega_A = \frac{v}{2a}$

C के सापेक्ष *P* का कोणीय वेग

$\omega_C = \frac{v}{a}$

$\therefore \frac{\omega_A}{\omega_C} = 1:2$

Problem 88. घड़ी के सैकण्ड के काँटे की लम्बाई 10 *mm* है। 15 सैकण्ड के पश्चात् घड़ी के कोणीय वेग में परिवर्तन होगा

(a) शून्य (b) $(10\pi/2)\ mms^{-1}$ (c) $(20/\pi)\ mms^{-1}$ (d) $10\sqrt{2}\ mms^{-1}$

Solution : (a) घड़ी के सैकण्ड के काँटे का कोणीय वेग नियत रहता है, तथा यह $\frac{2\pi\ rad}{60\ sec} = \frac{\pi}{30} rad/sec$ होता है। अतः कोणीय वेग में परिवर्तन शून्य होगा।

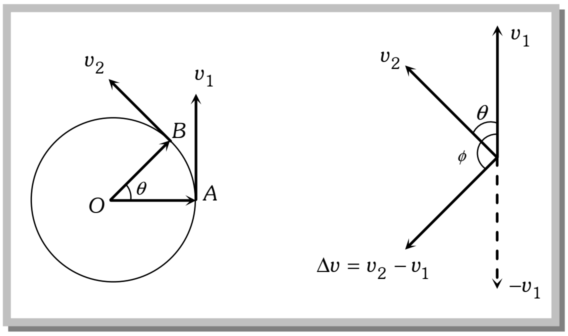
(4) **वेग में परिवर्तन** : एक कण एकसमान वृत्तीय गति कर रहा है। यह *t* समय में *A* से *B* पर पहुँचता है, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है। हमें *B* पर इसके वेग में परिवर्तन की दिशा तथा परिमाण ज्ञात करने हैं। वेग सदिश में परिवर्तन को निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है

$$\Delta v = \bar{v}_2 - v_1$$

या $$|\Delta v| = |v_2 - v_1| \Rightarrow \Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2\cos\theta}$$

एकसमान वृत्तीय गति के लिए $v_1 = v_2 = v$

अतः $\Delta v = \sqrt{2v^2(1-\cos\theta)} = 2v\sin\frac{\theta}{2}$



Δv की दिशा चित्र में प्रदर्शित है, जो कि निम्न प्रकार से दी जा सकती है

$$\phi = \frac{180^o - \theta}{2} = (90^o - \theta/2)$$

❑ रेखीय वेग तथा कोणीय वेग में सम्बन्ध

सदिश रूप में $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Problem 89. यदि कोई कण जो कि वृत्तीय गति करता है, समान समय में समान कोण निरूपित करता है, इसका वेग सदिश

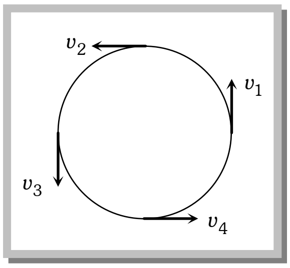
[CPMT 1972, 74; JIPMER 1997]

(a) नियत रहता है (b) परिमाण में परिवर्तित होता है

(c) दिशा में परिवर्तित होता है (d) दिशा तथा परिमाण दोनों में परिवर्तित होता है

Solution : (c) एकसमान वृत्तीय गति में वेग सदिश की दिशा में परिवर्तन होता है किन्तु इसका परिमाण सदैव नियत रहता है।

$|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}| = |\vec{v_3}| = |\vec{v_4}| =$ नियत



Problem 90. एक वस्तु को 20 *cm* त्रिज्या के क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। इसका कोणीय वेग 10 *rad/s* है। वृत्तीय पथ के किसी बिन्दु पर इसका रेखीय वेग होगा

(a) 10 *m/s* (b) 2 *m/s* (c) 20 *m/s* (d) $\sqrt{2}$ *m/s*

Solution : (b) $v = r\,\omega = 0.2 \times 10 = 2\,m/s$

Problem 91. विषुवत् रेखा पर किसी बिन्दु का रेखीय वेग होता है (पृथ्वी की त्रिज्या 6400 *km* है)

(a) 800 *km/hr* (b) 1600 *km/hr* (c) 3200 *km/hr* (d) 6400 *km/hr*

Solution : (b) $v = r\,w = 6400\,km \times \frac{2\pi}{24}\frac{rad}{hr} = 1675\,km/hr = 1600\,km/hr$

Problem 92. एक कण एकसमान चाल v से वृत्ताकार गति करता है। 60° के कोण पर इसकी चाल होगी [RPMT 1998]

(a) $v\sqrt{2}$ (b) $\frac{v}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{v}{\sqrt{3}}$ (d) v

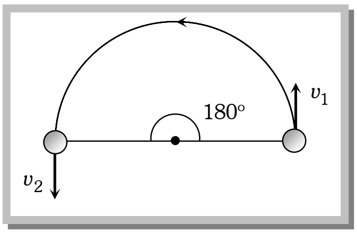
Solution : (d) एकसमान चाल का अर्थ है कि कण की चाल हमेशा नियत रहती है।

Problem 93. एक कण 2 *m* त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग के अनुदिश एकसमान चाल 5 ms^{-1} से गति कर रहा है। जब कण आधा चक्कर पूर्ण करता है, तब इसके वेग में परिवर्तन है

(a) शून्य (b) 10 ms^{-1} (c) $10\sqrt{2}\,ms^{-1}$ (d) $10/\sqrt{2}\,ms^{-1}$

Solution : (b) $\Delta v = 2v\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\times 5\sin\left(\frac{180^o}{2}\right)$

$= 2\times 5\sin 90^o = 10\, m/s$



Problem 94. यदि $\omega = 3\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ और $r = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$, तब रेखीय वेग का मान होगा [Pb. PMT 2000]

(a) $6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ (b) $18\hat{i} + 13\hat{j} - 2\hat{k}$ (c) $4\hat{i} - 13\hat{j} + 6\hat{k}$ (d) $6\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}$

Solution : (b) $v = \omega \times r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{J} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 6 \end{vmatrix}$

$v = (-24+6)i - (18-5)\hat{J} + (-18+20)\hat{k} = 18\hat{i} + 13\hat{J} - 2\hat{k}$

Problem 95. एक कण 1 *m* त्रिज्या के वृत्त का एक पूर्ण चक्कर लगाता है। इसके द्वारा लिया गया समय 10 *sec* है। उसकी गति का औसत वेग है [JIPMER 1999]

(a) $0.2\,\pi\, m/s$ (b) $2\,\pi\, m/s$ (c) $2\, m/s$ (d) शून्य

Solution : (d) पूर्ण चक्कर में कुल विस्थापन शून्य हो जाता है। अतः औसत वेग शून्य होगा।

Problem 96. *M* तथा *m* द्रव्यमानों के दो कण क्रमशः *R* तथा *r* त्रिज्या वाले वृत्त में गति कर रहे हैं। यदि उनके आवर्तकाल समान हैं, तब रेखीय वेगों का अनुपात होगा [CBSE PMT 2001]

(a) *MR* : *mr* (b) *M* : *m* (c) *R* : *r* (d) 1 : 1

Solution : (c) $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1\omega_1}{r_2\omega_2}$ चूँकि आवर्तकाल समान हैं अतः $\omega_1 = \omega_2 \therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{R}{r}$

(5) **आवर्तकाल** (*T*) : वृत्तीय गति में, किसी वस्तु द्वारा एक चक्कर पूर्ण करने में लिया गया समय उसका आवर्तकाल कहलाता है।

(i) मात्रक : सैकण्ड

(ii) विमाएँ : $[M^0L^0T]$

(iii) घड़ी के सैकण्ड के काँटे का आवर्तकाल = 60 सैकण्ड

(iv) घड़ी के मिनट के काँटे का आवर्तकाल = 60 मिनिट

(v) घड़ी के घण्टे के काँटे का आवर्तकाल = 12 घण्टे

(6) **आवृत्ति** (*n*) : वृत्तीय गति में, वस्तु द्वारा इकाई समय में पूर्ण किये गए चक्करों की संख्या उसकी आवृत्ति कहलाती है।

(i) मात्रक : s^{-1} या हर्ट्ज (*Hz*)

(ii) विमा : $[M^0L^0T^{-1}]$

- आवर्तकाल तथा आवृत्ति में सम्बन्ध : यदि वृत्तीय गति कर रही किसी वस्तु की आवृत्ति *n* है, इसका अर्थ है कि वस्तु 1 सैकण्ड में *n* चक्कर पूर्ण करती है। अतः वस्तु एक चक्कर 1/*n* सैकण्ड में पूर्ण करेगी

  $\therefore T = 1/n$

- कोणीय वेग, आवृत्ति तथा आवर्तकाल में सम्बन्ध : माना कि कोई बिन्दु वस्तु एक समान वृत्तीय गति कर रही है, तथा इसकी आवृत्ति *n* व आवर्तकाल *T* है। जब वस्तु एक चक्कर पूर्ण करती है, तब यह वृत्तीय मार्ग की अक्ष पर 2π रेडियन

का कोण बनाती है। इसका अर्थ है, जब समय $t = T$, $\theta = 2\pi$ रेडियन। अतः कोणीय वेग $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$

($T = 1/n$)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

- ❑ यदि दो कण एक ही वृत्त पर गति कर रहे हैं अथवा भिन्न समतलीय संकेन्द्रीय वृत्तों में समान दिशा में किन्तु भिन्न भिन्न नियत कोणीय वेगों ω_A तथा ω_B से गति कर रहे हैं, तब A के सापेक्ष B का कोणीय वेग

$$\omega_{\text{सापेक्षिक}} = \omega_B - \omega_A$$

अतः एक कण द्वारा दूसरे कण के सापेक्ष O के चारों ओर एक चक्कर पूर्ण करने में लगा समय (अर्थात् वह समय जिसमें B, दूसरे कण के सापेक्ष बिन्दु O के परितः एक चक्कर पूर्ण करता है) अर्थात् वह समय जिसमें B, O के परितः कण A की तुलना में एक अधिक या कम चक्कर पूर्ण करता है

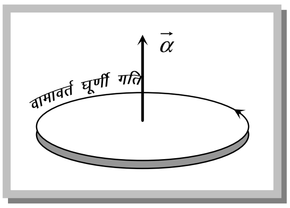
$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{सापेक्षिक}}} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{T_1T_2}{T_1 - T_2} \quad \left[\text{चूँकि } T = \frac{2\pi}{\omega}\right]$$

विशेष स्थिति : यदि $\omega_B = \omega_A, \omega_{\text{सापेक्षिक}} = 0$ अतः $T = \infty$ अर्थात् कण एक दूसरे के सापेक्ष अपनी पूर्व स्थिति में ही रहते हैं। भू–स्थायी उपग्रह इसी स्थिति पर आधारित होते हैं। ($\omega_1 = \omega_2$ = नियत)

(7) **कोणीय त्वरण** (α) : वृत्तीय गति में, किसी वस्तु के कोणीय वेग में होने वाले परिवर्तन की दर, उसका कोणीय त्वरण कहलाती है।

(i) यदि t तथा $t + \Delta t$ समयांतराल में वस्तु के कोणीय वेग में परिवर्तन $\Delta\omega$ है, तब वस्तु का कोणीय त्वरण

$$\alpha = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



(ii) मात्रक : $rad.\ s^{-2}$

(iii) विमा : $[M^0L^0T^{-2}]$

(iv) रेखीय त्वरण तथा कोणीय त्वरण में सम्बन्ध $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

(v) एकसमान वृत्तीय गति में ω नियत है, तब $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$

(vi) असमान वृत्तीय गति के लिए $\alpha \neq 0$

- ❑ रेखीय (स्पर्शज्यीय) त्वरण तथा कोणीय त्वरण में सम्बन्ध $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$
- ❑ एकसमान वृत्तीय गति में कोणीय त्वरण शून्य होता है, अतः स्पर्शज्यीय त्वरण भी शून्य होता है।
- ❑ असमान वृत्तीय गति में $a \neq 0$ (क्योंकि $\alpha \neq 0$)।

Problem 97. एक वस्तु r त्रिज्या के वृत्त में एकसमान चाल v से चक्कर लगा रही है, वस्तु का कोणीय त्वरण है

(a) $\frac{v}{r}$ (b) शून्य

(c) $\frac{v^2}{r}$ त्रिज्या के अनुदिश तथा केन्द्र की ओर (d) $\frac{v^2}{r}$ त्रिज्या के अनुदिश तथा केन्द्र से दूर

Solution : (b) एकसमान वृत्तीय गति में चूँकि ω नियत है, अतः $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$

Problem 98. किसी कार का रेखीय त्वरण $10 m/s^2$ है। यदि कार के पहियों का व्यास $1m$ हो तब पहियों का कोणीय त्वरण होगा

(a) 10 rad/sec^2 (b) 20 rad/sec^2 (c) 1 rad/sec^2 (d) 2 rad/sec^2

Solution : (b) $\text{कोणीय त्वरण} = \frac{\text{रेखीय त्वरण}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{10}{0.5} = 20\, rad/sec^2$

Problem 99. एक मोटर की कोणीय चाल 10 *s* में 600 *rpm* से बढ़कर 1200 *rpm* हो जाती है, मोटर का कोणीय त्वरण है

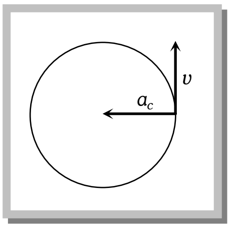
(a) $600\ rad\ sec^{-2}$ (b) $60\pi\, rad\, sec^{-2}$ (c) $60\, rad\, sec^{-2}$ (d) $2\pi\, rad\, sec^{-2}$

Solution : (d) $\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t} = \frac{2\pi(1200 - 600)}{10 \times 60}\frac{rad}{sec^2} = 2\pi\, rad/sec^2$

अभिकेन्द्रीय त्वरण

(1) एकसमान वृत्तीय गति कर रही किसी वस्तु का त्वरण, अभिकेन्द्रीय त्वरण कहलाता है।

(2) यह वस्तु पर हमेशा त्रिज्या के अनुदिश तथा वृत्ताकार मार्ग के केन्द्र की ओर कार्यरत रहता है।



(3) अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 4\pi n^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$

(4) अभिकेन्द्रीय त्वरण की दिशा : इसकी दिशा $\Delta\vec{v}$ की दिशा में होती है। जब Δt घटता है तब $\Delta\theta$ भी घटता है। इसके कारण $\Delta\vec{v}$, $\vec{v}$ के अधिकाधिक लंबवत् होता जाता है। जब $\Delta t \to 0$, तब $\Delta\vec{v}$ वेग सदिश के पूर्ण अभिलम्बवत् होता है, किसी कण का वेग सदिश किसी क्षण पर वृत्ताकार मार्ग की स्पर्शज्या के अनुदिश होता है, अतः $\Delta\vec{v}$, तथा अभिकेन्द्रीय त्वरण सदिश उस बिन्दु पर वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या के अनुदिश होता है तथा इसकी दिशा वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर होती है।

Problem 100. एक साइकिल का पहिया, जिसकी त्रिज्या 4 *m* है, दो सैकण्ड में एक चक्कर पूरा करता है, साइकिल का त्वरण है [Pb. PMT 2001]

(a) $\pi^2 m/s^2$ (b) $2\pi^2 m/s^2$ (c) $4\pi^2 m/s^2$ (d) $8\pi\, m/s^2$

Solution : (c) दिया है $r = 4\, m$ और $T = 2\, sec$

$$\therefore a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{4\pi^2}{(2)^2} 4 = 4\pi^2\, m/s^2$$

Problem 101. एक पत्थर को 50 *cm* लंबी डोरी से बाँधकर क्षैतिज वृत्त में नियत वेग से घुमाया जाता है। यदि पत्थर 20 सैकण्ड में 10 चक्कर पूर्ण करता है, तब पत्थर के त्वरण का परिमाण होगा [Pb. PMT 2000]

(a) 493 cm/sec^2 (b) 720 cm/sec^2 (c) 860 cm/sec^2 (d) 990 cm/sec^2

Solution : (a) $\text{आवर्तकाल} = \frac{\text{कुल समय}}{\text{चक्करों की संख्या}} = \frac{20}{10} = 2\, sec$

$$\therefore a_c = \frac{4\pi^2}{T^2}.r = \frac{4\pi^2}{(2)^2} \times (1/2)\, m/s^2 = 4.93\, m/s^2 = 493\, cm/s^2$$

Problem 102. एक कण *r* त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग के अनुदिश नियत वेग *v* से गति करता है, तथा *T* समय में वृत्त का चक्कर पूर्ण करता है। कण का त्वरण है [Orissa JEE 2002]

(a) mg (b) $\frac{2\pi v}{T}$ (c) $\frac{\pi r^2}{T}$ (d) $\frac{\pi v^2}{T}$

Solution : (b) $a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = v\omega = v\left(\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{2\pi v}{T}$

Problem 103. यदि किसी वृत्त की परिधि पर स्थित कण का घूर्णन वेग तथा वृत्त की त्रिज्या की आधी दूरी तक गिरने में कण द्वारा प्राप्त वेग परस्पर समान है, तब अभिकेन्द्रीय त्वरण का मान है

(a) $\frac{g}{2}$ (b) $\frac{g}{4}$ (c) $\frac{g}{3}$ (d) g

Solution : (d) h ऊँचाई गिरने में वस्तु द्वारा प्राप्त वेग $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{r}{2}}$ [क्योंकि $h = \frac{r}{2}$ दिया है]

अतः $v = \sqrt{gr} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = g$

Problem 104. दो कारें वक्राकार मार्गों पर क्रमशः 90 *km/h* तथा 15 *km/h* की चाल से गति कर रही हैं। प्रत्येक कार का त्वरण समान है। वक्रों की त्रिज्याओं का अनुपात होगा [EAMCET (Med.) 1998]

(a) 4 : 1 (b) 2 : 1 (c) 16 : 1 (d) 36 : 1

Solution : (d) अभिकेन्द्रीय त्वरण $= \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{v_2^2}{r_2}$ (दिया है)

$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \left(\frac{90}{15}\right)^2 = \frac{36}{1}$

Problem 105. $0.20m$ त्रिज्या का एक पहिया विरामावस्था से $1\, rad/s^2$ के कोणीय त्वरण तक त्वरित होता है। 90^o घूर्णन के पश्चात् इसकी रिम पर स्थित किसी कण का त्रिज्यीय त्वरण होगा

(a) $\pi\ m/s^2$ (b) $0.5\ \pi\ m/s^2$ (c) $2.0\pi\ m/s^2$ (d) $0.2\ \pi\ m/s^2$

Solution : (d) गति समीकरण से

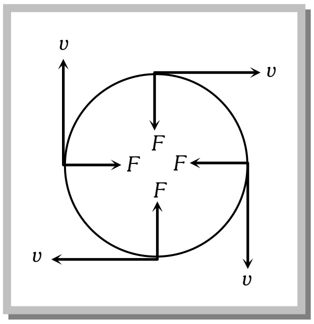
पहिए द्वारा प्राप्त कोणीय चाल $\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\theta = 0 + 2 \times 1 \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_2^2 = \pi$

अतः त्रिज्यीय त्वरण $\omega^2 r = \pi \times 0.2 = 0.2\pi\, m/s^2$

अभिकेन्द्रीय बल

न्यूटन की गति के प्रथम नियम के अनुसार, जब कोई वस्तु एकसमान वेग से सीधी रेखा में गति करती है, तो उसके इस वेग को बनाए रखने के लिए किसी बल की आवश्यकता नहीं होती। परन्तु जब वस्तु वृत्ताकार मार्ग के अनुदिश एकसमान वेग से गति करती है, तब इसकी दिशा लगातार बदलती है अर्थात् वस्तु की दिशा में परिवर्तन के कारण इसके वेग की दिशा भी बदलती रहती है। न्यूटन की गति के द्वितीय नियम के अनुसार किसी वस्तु की दिशा में परिवर्तन केवल तभी होता है, जब उस पर कोई बाह्य बल लगे।

जड़त्व के कारण, वृत्तीय मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर, वस्तु उस बिन्दु पर वृत्तीय मार्ग की स्पर्शज्या के अनुदिश गति करती है (चित्र में), चूँकि प्रत्येक वस्तु में दैशिक जड़त्व का गुण होता है, अतः वेग की दिशा स्वयं परिवर्तित नहीं हो सकती, इस परिवर्तन हेतु हमें एक बल लगाना होगा, किन्तु यह बल ऐसा होना चाहिए कि यह केवल वेग की दिशा परिवर्तित करे, परिमाण नहीं। ऐसा तभी सम्भव है जब बल वेग की दिशा के लंबवत् हो। चूँकि वेग वृत्त की स्पर्शज्या के अनुदिश है, अतः यह बल त्रिज्या के अनुदिश होना चाहिए (क्योंकि किसी बिन्दु पर वृत्त की त्रिज्या, उस बिन्दु पर उसकी स्पर्शज्या के अभिलंबवत् होती है)। अब चूँकि यह बल वस्तु को वृत्तीय मार्ग में गति हेतु आवश्यक है, अतः इसे केन्द्र की ओर लगना चाहिए। यह केन्द्र की ओर लगने वाला बल ही अभिकेन्द्रीय बल कहलाता है।



अतः अभिकेन्द्रीय बल वह बल है, जो वस्तु की एकसमान वेग से वृत्ताकार गति करने हेतु आवश्यक है। यह बल वस्तु पर वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश तथा केन्द्र की ओर लगता है।

(1) अभिकेन्द्रीय बल के सूत्र : $F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m4\pi^2 n^2 r = \frac{m4\pi^2 r}{T^2}$

(2) विभिन्न स्थितियों में अभिकेन्द्रीय बल

स्थिति	अभिकेन्द्रीय बल
डोरी से केस एक पिण्ड को क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है	डोरी में तनाव
समतल मार्ग पर वाहन जब मुड़ता है	सड़क द्वारा टायरों पर आरोपित घर्षण बल
स्पीड ब्रेकर (गति अवरोधक) से गुजरता वाहन	वाहन का भार या भार का घटक
सूर्य के चारों ओर पृथ्वी का घूर्णन	सूर्य द्वारा लगाया गया गुरुत्वीय बल
किसी परमाणु में नाभिक के चारों ओर गति करता हुआ इलेक्ट्रॉन	नाभिक में स्थित प्रोटॉनों द्वारा लगाया गया कूलॉम आकर्षण बल
चुम्बकीय क्षेत्र में वृत्तीय गति करता हुआ आवेशित कण	चुम्बकीय क्षेत्र स्थापित करने वाले कारक द्वारा लगाया गया चुम्बकीय बल

अपकेन्द्रीय बल

यह एक काल्पनिक बल है, जो वृत्तीय गति से जुड़े जड़त्व के प्रभाव की व्याख्या पर आधारित है। जब कोई वस्तु वृत्तीय मार्ग में घूम रही है, तथा यदि इस पर लग रहा अभिकेन्द्रीय बल समाप्त हो जाता है, तब वस्तु वृत्तीय मार्ग छोड़ देती है। एक प्रेक्षक A के लिए, जो कि इस वृत्तीय गति में हिस्सा नहीं लेता, वस्तु जहाँ मुक्त होती है, उस बिन्दु के स्पर्शज्या के अनुदिश गति करती हुई प्रतीत होती है। एक अन्य प्रेक्षक B के लिए, जो कि इस वृत्तीय गति का एक हिस्सा है, (अर्थात् प्रेक्षक B वस्तु के साथ समान वेग से वृत्तीय गति कर रहा है), मुक्त होने से पहले वस्तु स्थिर प्रतीत होती है। जब वस्तु मुक्त होती है, तब यह B के लिए इस प्रकार प्रतीत होती है, जैसे वस्तु को किसी बल द्वारा वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केन्द्र से दूर की ओर फेंक दिया गया हो। परन्तु वास्तविकता में वस्तु पर कोई बल कार्यरत नहीं है। बल की अनुपस्थिति में वस्तु अपने जड़त्व के कारण एक सीधी रेखा में गति करती है। प्रेक्षक A के लिए यह घटना जड़त्व के कारण होगी किन्तु प्रेक्षक B तथा वस्तु का जड़त्व समान होगा, अतः प्रेक्षक B के लिए उपरोक्त घटना जड़त्व से सम्बन्धित नहीं होगी। जब वस्तु पर कार्यरत अभिकेन्द्रीय बल समाप्त हो जाता है, तब वस्तु वृत्तीय मार्ग को छोड़ देती है तथा एक सीधी रेखा में गति करने लगती है किन्तु प्रेक्षक B को ऐसा प्रतीत होता है मानो वस्तु को किसी वास्तविक बल द्वारा त्रिज्या के अनुदिश बाहर की ओर फेंक दिया गया हो। इस आभासी अथवा काल्पनिक बल की संकल्पना उस प्रेक्षक के लिए जड़त्व के प्रभाव की व्याख्या हेतु की जाती है, जो कि स्वयं वृत्तीय गति में भाग लेता है। इस जड़त्वीय बल को ही अपकेन्द्रीय बल कहा जाता है। अतः अपकेन्द्रीय बल एक आभासी बल है जो कि केवल घूर्णन निर्देश फ्रेम के लिए ही अस्तित्व रखता है।

Problem 106. 0.1 *kg* की एक गेंद को किसी डोरी से बाँधकर 1 *m* त्रिज्या के क्षैतिज वृत्त में प्रारम्भिक चाल 10 *r.p.m.* से घुमाया जाता है। त्रिज्या को स्थिर रखकर यदि डोरी का तनाव इसके प्रारम्भिक तनाव का एक चौथाई कर दिया जाए, तब उसकी चाल होगी, [MP PMT 2001]

(a) 5 *r.p.m.* (b) 10 *r.p.m.* (c) 20 *r.p.m.* (d) 14 *r.p.m.*

Solution : (a) डोरी में तनाव $T = m\omega^2 r = m4\pi^2 n^2 r$

$T \propto n^2$ या $n \propto \sqrt{T}$ [क्योंकि m और r नियत हैं]

$\therefore \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{T/4}{T}} \Rightarrow n_2 = \frac{n_1}{2} = \frac{10}{2} = 5\,rpm$

Problem 107. एक बेलनाकार बर्तन कुछ भाग में पानी से भरकर इसे ऊर्ध्वाधर केन्द्रीय अक्ष के सापेक्ष घुमाया जाता है। इसकी सतह [RPET 2000]

(a) समान रूप से ऊपर उठेगी (b) इसके किनारों से ऊपर उठेगी

(c) बीच से ऊपर उठेगी (d) समान रूप से नीचे गिरेगी

Solution : (b) अभिकेन्द्रीय बल के कारण पानी की सतह बर्तन की दीवारों की तरफ से ऊपर उठेगी।

Problem 108. एक प्रोटॉन, जिसका द्रव्यमान 1.6×10^{-27} *kg* है, 0.10 *m* त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा में चक्कर लगाता है। यदि इस पर 4×10^{-3} *N* का अभिकेन्द्रीय बल लगता है। तब प्रोटॉन के चक्करों की आवृत्ति होगी (लगभग) [Kerala PMT 2002]

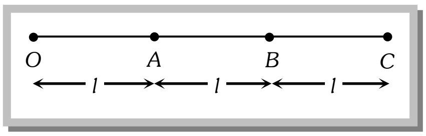
(a) 0.08×10^8 *cycles per sec* (b) 4×10^8 *cycles per sec*

(c) 8×10^8 *cycles per sec* (d) 12×10^8 *cycles per sec*

Solution : (a) $F = 4 \times 10^{-13}\, N\,;\, m = 1.6 \times 10^{-27}\, kg\,;\; r = 0.1 m$

अभिकेन्द्रीय बल $F = m4\pi^2 n^2 r \therefore n = \sqrt{\dfrac{F}{4m\pi^2 r}} = 8 \times 10^6\, cycles/sec = 0.08 \times 10^8\, cycle/sec$.

Problem 109. तीन एकसमान कण एक डोरी से परस्पर जुड़े हुए हैं, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है। सभी तीनों कण क्षैतिज समतल में गति कर रहे हैं। यदि सबसे बाहरी कण का वेग v_0 है, तब डोरी के तीनों भागों में तनावों का अनुपात होगा [UPSEAT 2003]



(a) 3 : 5 : 7 (b) 3 : 4 : 5 (c) 7 : 11 : 6 (d) 3 : 5 : 6

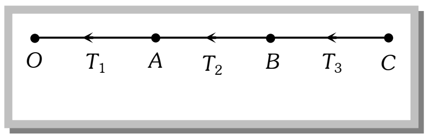
Solution : (d) माना कि डोरी का कोणीय वेग ω है।

'*C*' कण के लिए $\Rightarrow T_3 = m\omega^2 3l$

'*B*' कण के लिए $T_2 - T_3 = m\omega^2 2l \Rightarrow T_2 = m\omega^2 5l$

'*A*' कण के लिए $T_1 - T_2 = m\omega^2 l \Rightarrow T_1 = m\omega^2 6l$

$\therefore\; T_3 : T_2 : T_1 = 3 : 5 : 6$



Problem 110. 1 *kg* द्रव्यमान के पत्थर को 1 *m* लम्बी डोरी से बाँधकर एकसमान कोणीय वेग 2 *rad/s* से क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। डोरी में तनाव है (न्यूटन में) [KCET 1998]

(a) 2 (b) $\dfrac{1}{3}$ (c) 4 (d) $\dfrac{1}{4}$

Solution : (c) $T = m\omega^2 r = 1 \times (2)^2 \times (1) = 4\, N$

Problem 111. एक रस्सी 100 *N* का अधिकतम बल बिना टूटे सहन कर सकती है। 1 *kg* द्रव्यमान की वस्तु को 1 *m* लंबी इस रस्सी के एक सिरे से बाँधकर इसे क्षैतिज समतल में घुमाया जाता है। वस्तु की अधिकतम रेखीय चाल क्या होनी चाहिए, जिससे कि रस्सी न टूटे

(a) 10 *m/s* (b) 20 *m/s* (c) 25 *m/s* (d) 30 *m/s*

Solution : (a) रस्सी में तनाव, इसे अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है, अतः $T = \dfrac{mv^2}{r}$ क्रांतिक स्थिति में यह तनाव, त्रोटन बल के बराबर होगा $\therefore \dfrac{mv_{max}^2}{r} = 100 \Rightarrow \quad v_{max}^2 = \dfrac{100 \times 1}{1} \quad \Rightarrow v_{max} = 10 m/s$

Problem 112. एक द्रव्यमान घर्षणहीन क्षैतिज सतह पर रखा है। इसे एक धागे से बाँधकर एक स्थिर केन्द्र के चारों ओर कोणीय वेग ω_0 से घुमाया जाता है। यदि धागे की लम्बाई तथा कोणीय वेग दुगुने कर दिए जाएें तब डोरी, जिसका प्रारम्भिक तनाव T_0 है, का तनाव अब होगा [AIIMS 1985]

(a) T_0 (b) $T_0/2$ (c) $4T_0$ (d) $8T_0$

Solution : (d) $T = m\omega^2 l \;\therefore\; \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{l_2}{l_1}\right) \Rightarrow \frac{T_2}{T_0} = \left(\frac{2\omega}{\omega}\right)^2\left(\frac{2l}{l}\right) \Rightarrow T_2 = 8T_0$

Problem 113. एक पत्थर को l लम्बाई की डोरी द्वारा क्षैतिज वृत्त में स्थायी रूप से घुमाया जाता है। इसका आवर्तकाल T है। यदि डोरी के तनाव को स्थिर रखकर इसकी लम्बाई l को 1% को बढ़ा दिया जाए, तब T में प्रतिशत परिवर्तन होगा

(a) 1% (b) 0.5% (c) 2% (d) 0.25%

Solution : (b) तनाव $= \frac{m4\pi^2 l}{T^2} \;\therefore\; l \propto T^2$ या $T \propto \sqrt{l}$ [तनाव तथा द्रव्यमान नियत हैं]

आवर्तकाल में प्रतिशत परिवर्तन $= \frac{1}{2}$ (लम्बाई में प्रतिशत परिवर्तन) [यदि प्रतिशत परिवर्तन अत्यल्प है]

$$= \frac{1}{2}(1\%) = 0.5\%$$

Problem 114. यदि वृत्तीय गति करती हुई किसी वस्तु का द्रव्यमान, वेग तथा घूर्णन त्रिज्या सभी 50% बढ़ा दिए जाएँ, तब वस्तु को वृत्तीय गति में बनाए रखने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल में कितने प्रतिशत वृद्धि करना पड़ेगी

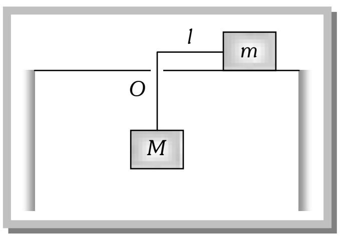
(a) 225% (b) 125% (c) 150% (d) 100%

Solution : (b) अभिकेन्द्रीय बल $F = \frac{mv^2}{r}$

यदि m, v तथा r 50% बढ़ा दिये जाते हैं, तब बल $F' = \frac{\left(m + \frac{m}{2}\right)\left(v + \frac{v}{2}\right)^2}{\left(r + \frac{r}{2}\right)} = \frac{9}{4}\frac{mv^2}{r} = \frac{9}{4}F$

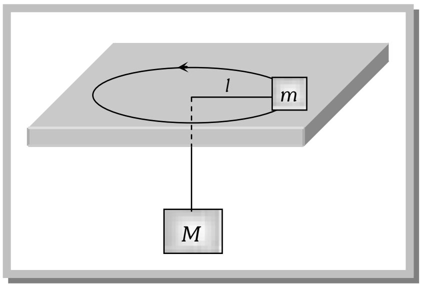
अतः बल में प्रतिशत वृद्धि $\frac{\Delta F}{F} \times 100 = \frac{F' - F}{F} \times 100\% = \frac{500}{4}\% = 125\%$

Problem 115. दो द्रव्यमान m तथा M एक भारहीन डोरी से जुड़े हैं एवं यह डोरी टेबिल के केन्द्र पर स्थित एक सूक्ष्म छिद्र O से गुजरती है। द्रव्यमान m टेबिल पर रखा है, तथा M को ऊर्ध्वाधरतः लटकाया गया है। m को एक क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है, जिसका केन्द्र O है। यदि O से m के बीच की डोरी की लम्बाई l हो, तब वह आवृत्ति, जिससे m को घुमाने पर M स्थिर रहे, होगी



(a) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{m\,l}}$ (b) $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{Mg}{m\,l}}$ (c) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m\,l}{Mg}}$ (d) $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{m\,l}{Mg}}$

Solution : (a) टेबिल पर स्थित द्रव्यमान m एकसमान वृत्तीय गति करता है। यदि इसकी आवृत्ति n हो तब अभिकेन्द्रीय बल $= m4\pi^2n^2l$



संतुलनावस्था में यह बल भार Mg के बराबर होगा

$m4\pi^2n^2l = Mg$

$\therefore n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{ml}}$

Problem 116. M द्रव्यमान का एक कण r त्रिज्या के वृत्तीय मार्ग में नियत चाल से गति कर रहा है, तथा इस पर अभिकेन्द्रीय बल F कार्यरत है। कण की चाल है [MP PMT 2002]

(a) $\sqrt{\frac{rF}{m}}$ (b) $\sqrt{\frac{F}{r}}$ (c) $\sqrt{Fmr}$ (d) $\sqrt{\frac{F}{mr}}$

Solution : (a) अभिकेन्द्रीय बल $F = \frac{mv^2}{r}$ $\therefore v = \sqrt{\frac{rF}{m}}$

Problem 117. किसी परमाणु में नाभिक के चारों ओर इलेक्ट्रॉन के चक्कर लगाने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल, नाभिक द्वारा इलेक्ट्रॉन पर लगाया गया निम्न बल होता है [MP PET 2002]

(a) नाभिकीय बल (b) गुरूत्वीय बल (c) चुम्बकीय बल (d) स्थिर वैद्युत बल

Solution : (d)

Problem 118. एक मोटर साइकिल सवार मुड़ते समय गाड़ी का वेग दुगुना कर लेता है। बाहर की ओर लगने वाला बल हो जाएगा [AFMC 2002]

(a) दुगुना (b) आधा (c) चार गुना (d) एक चौथाई

Solution : (c) $F = \frac{mv^2}{r}$ $\therefore F \propto v^2$ या $\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(\frac{2v}{v}\right)^2 = 4 \Rightarrow F_2 = 4F_1$

Problem 119. एक सोडावाटर की बोतल को पूरा भरकर ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है। बोतल के किस भाग के समीप बुलबुले इक्ट्ठे होंगे

(a) सबसे नीचे (b) बोतल के बीच में

(c) ऊपरी भाग के समीप (d) बोतल में एकसमान रूप से

Solution : (c) हल्के होने के कारण बुलबुले कम अपकेन्द्रीय बल का अनुभव करते हैं अतः वे वृत्तीय मार्ग के केन्द्र के समीप अर्थात् बोतल ऊपरी भाग के समीप इकट्ठे हो जाते हैं।

Problem 120. एक वस्तु वृत्तीय गति कर रही है। एक प्रेक्षक O_1, वृत्त के केन्द्र पर बैठा है तथा एक अन्य प्रक्षेक O_2 वस्तु पर स्थित है। अपकेन्द्रीय बल अनुभव किया जाएगा, प्रेक्षक

(a) केवल O_1 द्वारा (b) केवल O_2 द्वारा

(c) O_1 तथा O_2 दोनों के द्वारा (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (b) अपकेन्द्रीय बल एक आभासी बल है, जो कि केवल उसी प्रेक्षक द्वारा अनुभव किया जाता है, जो वृत्तीय गति करती वस्तु के साथ जुड़ा हो।

अभिकेन्द्रीय बल द्वारा किया गया कार्य

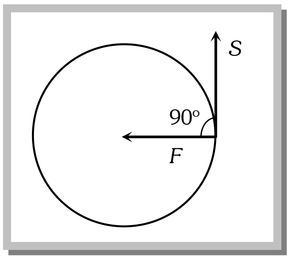
अभिकेन्द्रीय बल द्वारा किया गया कार्य हमेशा शून्य होता है, क्योंकि यह वेग के लंबवत् अतः विस्थापन के भी लंबवत् होता है।

किया गया कार्य = घूमती हुई वस्तु की गतिज ऊर्जा में वृद्धि

अतः किया गया कार्य = 0

इसके अलावा $W = \vec{F}.\vec{S} = F \cdot S \cos\theta$

$= F{\cdot}S \cos 90^o = 0$



उदाहरण : (i) जब एक इलेक्ट्रॉन हाइड्रोजन परमाणु की एक निश्चित कक्षा में नाभिक के चारों ओर चक्कर लगाता है, तब यह न तो ऊर्जा अवशोषित करता है और न ही ऊर्जा उत्सर्जित करता है, इसका अर्थ है कि इसकी ऊर्जा नियत रहती है।

(ii) जब किसी उपग्रह को एक बार पृथ्वी के चारों ओर की कक्षा में स्थापित कर दिया जाता है, तथा यह एक निश्चित वेग से घूमना शुरू कर देता है, तब इसकी वृत्तीय गति के लिए ईंधन की आवश्यकता नहीं होती।

Problem 121. एक कण क्षैतिज समतल में एकसमान वृत्तीय गति करता है। वृत्त की त्रिज्या 20 *cm* है। कण पर लगने वाला अभिकेन्द्रीय बल 10 *N* है। इसकी गतिज ऊर्जा है

(a) 0.1 *Joule* (b) 0.2 *Joule* (c) 2.0 *Joule* (d) 1.0 *Joule*

Solution : (d) $\frac{mv^2}{r} = 10\,N$ (दिया है) $\Rightarrow mv^2 = 10 \times r = 10 \times 0.2 = 2$

गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2) = 1\,Joule.$

Problem 122. 100 *g* द्रव्यमान की एक वस्तु *r* त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग में नियत वेग से घूर्णन कर रही है। एक पूर्ण चक्कर में किया गया कार्य होगा [AFMC 1998]

(a) 100*r Joule* (b) (*r*/100) *Joule* (c) (100/*r*) *Joule* (d) शून्य

Solution : (d) क्योंकि एकसमान वृत्तीय गति में अभिकेन्द्रीय बल द्वारा किया गया कार्य हमेशा शून्य होता है।

Problem 123. *m* द्रव्यमान का एक कण *r* त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में एकसमान चाल से गति कर रहा है। यदि वृत्त के अक्ष के चारों ओर कण का कोणीय वेग संवेग *L* हो, तब कण की गतिज ऊर्जा दी जा सकती है [CPMT 1995]

(a) L^2/mr^2 (b) $L^2/2mr^2$ (c) $2L^2/mr^2$ (d) mr^2L

Solution : (b) घूर्णन गतिज ऊर्जा $E = \frac{L^2}{2I} = \frac{L^2}{2mr^2}$ (क्योंकि $I = mr^2$)

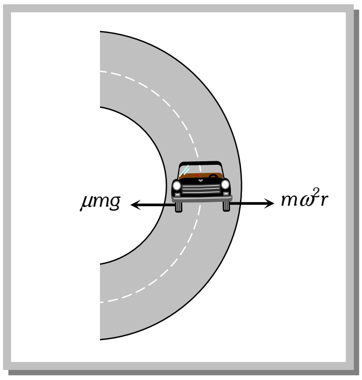
समतल सड़क पर वाहन का फिसलना

जब कोई वाहन वृत्तीय मार्ग पर मुड़ता है, तब इसे मुड़ने के लिए अभिकेन्द्रीय बल की आवश्यकता होती है।

यदि घर्षण, आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान कर देता है, तब वाहन वृत्तीय पथ पर सुरक्षित रूप से मुड़ सकता है।

घर्षण बल ≥ आवश्यक घर्षण बल

$$\mu mg \geq \frac{mv^2}{r}$$



$\therefore \quad v_{\text{सुरक्षित}} \le \sqrt{\mu r g}$

यह वाहन का अधिकतम वेग है, जिससे वह r त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग पर मुड़ सकता है, जहाँ सड़क तथा टायर के बीच घर्षण गुणांक μ है।

Problem 124. $100m$ त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग पर एक कार को मुड़ने के लिए आवश्यक अधिकतम वेग क्या होगा। सड़क तथा टायर के बीच घर्षण गुणांक 0.2 है [CPMT 1996]

(a) $0.14\ m/s$ (b) $140\ m/s$ (c) $1.4\ km/s$ (d) $14\ m/s$

Solution : (d) $v_{\max} = \sqrt{\mu r g} = \sqrt{0.2 \times 100 \times 10} = 10\sqrt{2} = 14\ m/s$

Problem 125. जब सड़क मार्ग सूखा है तथा घर्षण गुणांक μ है, तब वृत्ताकार मार्ग में एक कार की अधिकतम चाल $10\ m/s$ है। यदि सड़क गीली है तथा $\mu' = \frac{\mu}{2}$, तब अधिकतम चाल होगी

(a) $5\ m/s$ (b) $10\ m/s$ (c) $10\sqrt{2}\ m/s$ (d) $5\sqrt{2}\ m/s$

Solution : (d) $v \propto \sqrt{\mu} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{\mu/2}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\ m/s$

Problem 126. टायर तथा सड़क के बीच घर्षण गुणांक 0.25 है। वह अधिकतम चाल जिससे कोई कार 40 m त्रिज्या के वक्र पर बिना फिसले चलती है (मान लीजिए $g = 10\ ms^{-2}$) [Kerala PMT 2002]

(a) $40\ ms^{-1}$ (b) $20\ ms^{-1}$ (c) $15\ ms^{-1}$ (d) $10\ ms^{-1}$

Solution : (d) $v_{\max} = \sqrt{\mu r g} = \sqrt{0.25 \times 40 \times 10} = 10\ m/s$

घूमते हुए प्लेटफॉर्म पर वस्तु का फिसलना

घूमते हुए प्लेटफॉर्म पर, घूर्णन अक्ष से r दूरी पर स्थित m द्रव्यमान की वस्तु को फिसलने से रोकने के लिए, घर्षण बल द्वारा, आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करना चाहिए

अभिकेन्द्रीय बल = घर्षण बल

$$m\omega^2 r = \mu m g$$

$$\therefore \quad \omega_{\max} = \sqrt{(\mu g / r)},$$

अतः प्लेटफॉर्म के घूर्णन का अधिकतम कोणीय वेग $\sqrt{(\mu g / r)}$ होना चाहिए, जिससे कि इस पर रखी वस्तु फिसल न सके।

साइकिल सवार का झुकाव

एक क्षैतिज मार्ग पर गति कर रहा साइकिल सवार जब वक्राकार मार्ग पर मुड़ता है, तब वह अंदर की ओर झुक जाता है, जिससे उसे आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्राप्त हो जाता है। मान लीजिए, कि एक साइकिल सवार जिसका भार mg है, r त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग में v वेग से मुड़ता है। मुड़ने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्राप्त करने के लिए साइकिल सवार अंदर की ओर θ कोण से झुक जाता है, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है।

साइकिल सवार पर निम्न बल कार्य करते हैं :

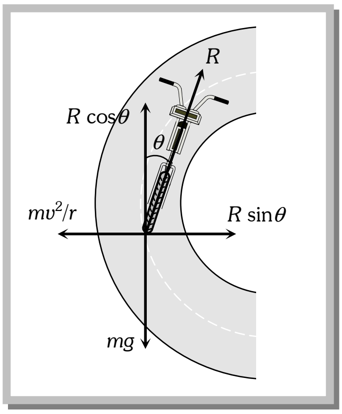
भार mg जो कि नीचे की ओर लगता है, तथा साइकिल तथा साइकिल सवार के गुरुत्व केन्द्र पर लगता है।

सतह द्वारा साइकिल सवार पर लगने वाली प्रतिक्रिया R है यह ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाने वाली रेखा के अनुदिश लगती है।

अभिलंब प्रतिक्रिया R का ऊर्ध्वाधर घटक $R\cos\theta$ साइकिल सवार के भार को सन्तुलित करता है, जबकि क्षैतिज घटक $R \sin \theta$, साइकिल सवार को आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है।

$$R \sin\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad .....(i)$$

और $$R \cos\theta = mg \qquad .....(ii)$$



समीकरण (i) में (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{mv^2/r}{mg}$$

या $$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \qquad ....(iii)$$

अतः साइकिल सवार को कोण $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$ से झुकना चाहिए।

यह दर्शाता है कि साइकिल सवार द्वारा झुकाव कोण अधिक होगा, यदि

(i) वक्र की त्रिज्या कम हो अर्थात् वक्र तीक्ष्ण हो।

(ii) साइकिल सवार का वेग अधिक हो।

❑ इन्हीं कारणों से, बर्फ पर स्केटिंग करने वाले अथवा हवाई जहाज मुड़ते समय अन्दर की ओर झुक जाते हैं।

Problem 127. साइकिल पर बैठा एक लड़का 20 *metres/sec* के वेग से 20 मीटर त्रिज्या के वृत्त में मुड़ता है। साइकिल तथा लड़के का संयुक्त द्रव्यमान 90*kg* है। साइकिल द्वारा ऊर्ध्वाधर से बनाया गया कोण, जिससे कि वह गिरे नहीं, होगा $(g = 9.8\ m/\sec^2)$ [MP PMT 1995]

(a) 60.25^o (b) 63.90^o (c) 26.12^o (d) 30.00^o

Solution : (b) $r = 20m,\ v = 20m/s,\ m = 90kg,\ g = 9.8m/s^2$ (दिया है)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20\times 20}{20\times 10}\right) = \tan^{-1}(2) = 63.90^\circ$$

Problem 128. एक साइकिल सवार, $4.9\ m/s$ की चाल से सीधे मार्ग पर गति कर रहा है। यदि वह $4m$ त्रिज्या के तीक्ष्ण मोड़ पर मुड़ता है, तब साइकिल के टायर तथा सड़क के बीच घर्षण गुणांक का मान होगा [AIIMS 1999]

(a) 0.41 (b) 0.51 (c) 0.71 (d) 0.61

Solution : (d) $v = 4.9m/s,\ r = 4m$ तथा $g = 9.8m/s^2$ (दिया है)

$$\mu = \frac{v^2}{rg} = \frac{4.9\times 4.9}{4\times 9.8} = 0.61$$

Problem 129. एक साइकिल सवार मुड़ते समय अन्दर की ओर झुक जाता है, जबकि एक कार यात्री उसी तरह मुड़ने पर बाहर की ओर गिरता है। इसका कारण है

(a) कार साइकिल की तुलना में भारी होती है

(b) कार के चार पहिए होते हैं, जबकि साइकिल के केवल दो

(c) दोनों के वेग में अंतर के कारण

(d) साइकिल सवार अंदर की ओर झुककर अभिकेन्द्रीय बल का विरोध करता है, जबकि कार यात्री इस बल द्वारा बाहर की ओर गिरते हैं

Solution : (d)

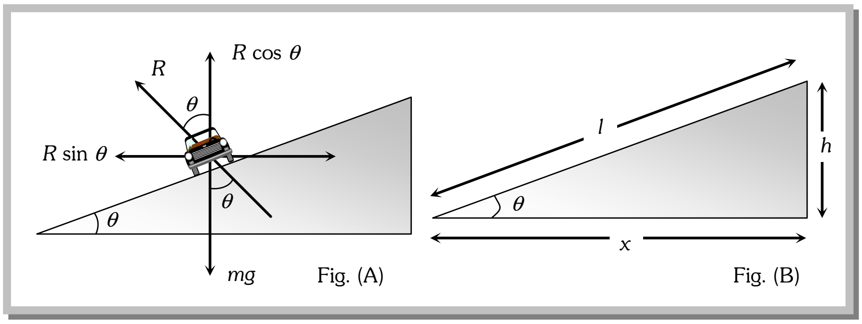
सड़क का ढलाव

अभिकेन्द्रीय बल प्राप्त करने के लिए साइकिल सवार वृत्तीय मार्ग के केन्द्र की ओर (अंदर की ओर) झुक जाता है, किन्तु चार पहियों वाले वाहनों जैसे कार इत्यादि के लिए ऐसा संभव नहीं है। अतः सड़क की बाहरी सतह मोड़ पर कुछ उठा दी जाती है जिससे वाहन स्वतः ही केन्द्र की ओर झुक जाते हैं।

चित्र (A) में प्रदर्शित प्रतिक्रिया R को दो घटकों में तोड़ा जा सकता है, घटक $R\cos\theta$ वाहन के भार को संतुलित करता है।

$\therefore \quad R\cos\theta = mg \quad$ ......(i)

और क्षैतिज घटक $R\sin\theta$ आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है तथा इसकी दिशा वृत्त के केन्द्र की ओर होती है।



अतः $\quad R\sin\theta = \dfrac{mv^2}{r} \quad$ ......(ii)

समीकरण (ii) को समीकरण (i) से भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad ......(iii)$$

या $\quad \tan\theta = \dfrac{\omega^2 r}{g} = \dfrac{v\omega}{rg} \quad$ ...... (iv)

[जहाँ $v = r\omega$]

यदि l = सड़क की चौड़ाई, h = बाहरी सतह का जमीन से उठाव तब चित्र (B) से

$\tan\theta = \dfrac{h}{x} = \dfrac{h}{l} \quad$ ....(v) [चूँकि θ बहुत कम है]

समीकरण (iii), (iv)और (v) से, $\quad \tan\theta = \dfrac{v^2}{rg} = \dfrac{\omega^2 r}{g} = \dfrac{v\omega}{rg} = \dfrac{h}{l}$

- ❑ यदि टायर तथा सड़क के बीच घर्षण भी उपस्थित है, तब $\dfrac{v^2}{rg} = \dfrac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}$
- ❑ उठे हुए घर्षणयुक्त मार्ग पर अधिकतम सुरक्षित चाल $v = \sqrt{\dfrac{rg(\mu + \tan\theta)}{1 - \mu\tan\theta}}$

Problem 130. 60 km/hr की चाल से कोई वाहन 0.1 km त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग के अनुदिश गति कर रहा है, सड़क का ढलाव कोण है [MNR 1993]

(a) $\dfrac{(60)^2}{0.1}$ (b) $\tan^{-1}\left[\dfrac{(50/3)^2}{100\times 9.8}\right]$ (c) $\tan^{-1}\left[\dfrac{100\times 9.8}{(50/3)^2}\right]$ (d) $\tan^{-1}\sqrt{60\times 0.1\times 9.8}$

Solution : (b) $\quad v = 60\,km/hr = \dfrac{50}{3}m/s$, $\quad r = 0.1km = 100\,m$, $\quad g = 9.8\,m/s^2$ (दिया है)

ढलाव कोण $\tan\theta = \dfrac{v^2}{rg}$ अथवा $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{v^2}{rg}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{(50/3)^2}{100\times 9.8}\right]$

Problem 131. एक वाहन v वेग से एक वृत्ताकार मार्ग में घूम रहा है, जिसकी चौड़ाई b तथा वक्रता त्रिज्या R है। वाहन पर लगने वाले अपकेन्द्रीय बल के विपरीत बल प्राप्त करने हेतु सड़क की बाहरी तथा आंतरिक सतहों के बीच का उठाव है [EAMCET 1983; MP PMT 1996]

(a) $\dfrac{v^2 b}{Rg}$ (b) $\dfrac{rb}{Rg}$ (c) $\dfrac{vb^2}{Rg}$ (d) $\dfrac{vb}{R^2 g}$

Solution : (a) सड़क का उठाव $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$ तथा $\tan\theta = \frac{h}{l}$

$$\therefore \frac{v^2}{rg} = \frac{h}{l} \Rightarrow h = \frac{v^2 l}{rg} = \frac{v^2 b}{Rg}$$ [क्योंकि $l = b$ तथा $r = R$, प्रश्न में दिया है]

Problem 132. मोड़ पर किसी सड़क की वक्रता त्रिज्या 50*m* है। सड़क की चौड़ाई 10*m* है तथा इसकी बाहरी सतह अंदर की सतह से 1.5*m* ऊँची है। इस झुकाव पर सुरक्षित चाल होगी

(a) $6.5\ m/s$ (b) $8.6\ m/s$ (c) $8\ m/s$ (d) $10\ m/s$

Solution : (b) $h = 1.5m,\ r = 50m,\ l = 10m,\ g = 10m/s^2$ (दिया है)

$$\frac{v^2}{rg} = \frac{h}{l} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{hrg}{l}} = \sqrt{\frac{1.5\times 50\times 10}{10}} = 8.6m/s$$

Problem 133. सड़क का ढलाव कोण वही रखते हुए किसी वृत्ताकार मार्ग पर गति करती हुई कार की अधिकतम चाल 10% बढ़ा दी जाती है। तब से सड़क की वक्रता त्रिज्या 20 *m* से परिवर्तित होकर हो जाएगी [EAMCET 1991]

(a) 16*m* (b) 18*m* (c) 24.25*m* (d) 30.5 *m*

Solution : (c) $\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow r \propto v^2$ (यदि θ नियत है)

$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(\frac{1.1v}{v}\right)^2 = 1.21 \Rightarrow r_2 = 1.21\times r_1 = 1.21\times 20 = 24.2\ m$$

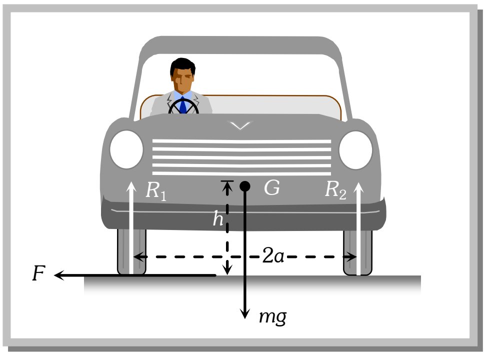
Problem 134. किसी चिकनी उठी हुई क्षैतिज सड़क की ढाल *p* है। यदि वक्र की त्रिज्या *r* है, तब वक्र मार्ग पर गति हेतु कार की अधिकतम सुरक्षित चाल होगी

(a) prg (b) $\sqrt{prg}$ (c) p/rg (d) $\sqrt{p/rg}$

Solution : (b) $\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow p = \frac{v^2}{rg} \quad \therefore v = \sqrt{prg}$

वाहन का पलटना

जब एक कार वृत्तीय मार्ग पर आवश्यक अधिकतम चाल से भी अधिक चाल से मुड़ती है, तब इसका अंदर की ओर का टायर सतह से ऊपर उठ जाता है।



कार का भार $= mg$

कार की चाल $= v$

वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या $= r$

कार के पहियों के केन्द्र के बीच की दूरी $= 2a$

सतह से कार के गुरूत्व केन्द्र की ऊँचाई $= h$

अंदर के पहिए पर सतह की प्रतिक्रिया $= R_1$

बाहरी पहिए पर सतह की प्रतिक्रिया $= R_2$

जब कार वृत्तीय मार्ग में गति करती है, तब क्षैतिज बल *F* आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है।

अर्थात् $F = \frac{mv^2}{R}$ ....(i)

घूर्णन के संतुलन के लिए, *G* के सापेक्ष बलों R_1, R_2 और *F* का आघूर्ण लेने पर

$Fh + R_1 a = R_2 a$ ....(ii)

ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई गति नहीं है, अतः $R_1 + R_2 = mg$ ....(iii)

समीकरण (i), (ii) व (iii) को हल करने पर

$$R_1 = \frac{1}{2}M\left[g - \frac{v^2 h}{ra}\right] \quad ....(iv)$$

और $$R_2 = \frac{1}{2}M\left[g + \frac{v^2 h}{ra}\right] \quad ....(v)$$

समीकरण (iv) से स्पष्ट है यदि v बढ़ता है, तब R_1 का मान घटता है तथा यदि $R_1 = 0$ तब,

$$\frac{v^2 h}{ra} = g \quad \text{या} \quad v = \sqrt{\frac{gra}{h}}$$

अर्थात् सीधे मार्ग पर बिना अधिक मुड़े कार की अधिकतम चाल $v = \sqrt{\frac{gra}{h}}$

Problem 135. दो पटरियों के बीच की दूरी $1.5m$ है। ट्रेन का गुरूत्व केन्द्र जमीन से $2m$ की ऊँचाई पर है। $120m$ त्रिज्या वाले वृत्ताकार पथ पर ट्रेन की अधिकतम चाल क्या होगी

(a) $10.5\ m/s$ (b) $42\ m/s$ (c) $21\ m/s$ (d) $84\ m/s$

Solution : (c) जमीन से गुरुत्व केन्द्र की ऊँचाई $h = 2m$, गुरुत्वीय त्वरण $g = 10\,m/s^2$

दोनों पटरियों के बीच की दूरी $2a = 1.5m$, वृत्ताकार पथ की त्रिज्या $r = 120\ m$ (दिया है)

$$v_{max} = \sqrt{\frac{g\,r\,a}{h}} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{10 \times 120 \times 0.75}{2}} = 21.2\,m/s$$

Problem 136. एक कार कभी कभी मोड़ पर पलट जाती है। पलटने की स्थिति में इसके [AFMC 1988]

(a) अंदर का पहिया पहले सतह छोड़ देता है

(b) बाहर का पहिया पहले सतह छोड़ देता है

(c) दोनों पहिए साथ–साथ सतह छोड़ते हैं

(d) कोई भी पहिया पहले सतह छोड़ सकता है

Solution : (a)

Problem 137. वृत्ताकार पथ पर गति कर रही कार मोड़ पर मुड़ती है। यदि R_1 तथा R_2 क्रमशः अंदर तथा बाहरी पहियों पर प्रतिक्रिया है, तब

(a) $R_1 = R_2$ (b) $R_1 < R_2$ (c) $R_1 > R_2$ (d) $R_1 \geq R_2$

Solution : (b) अंदर के पहिए पर प्रतिक्रिया $R_1 = \frac{M}{2}\left[g - \frac{v^2 h}{r\,a}\right]$ और बाहरी पहिए पर प्रतिक्रिया $R_2 = \frac{M}{2}\left[g + \frac{v^2 h}{r\,a}\right]$

$\therefore R_1 < R_2$.

Problem 138. एक ट्रेन A पूर्व से पश्चिम की ओर चल रही है, तथा समान द्रव्यमान की एक अन्य ट्रेन B, पश्चिम से पूर्व की ओर समान चाल से भूमध्य रेखा के अनुदिश चल रही है। A रेल्वे पथ पर F_1 बल से दबाव डालती है, तथा B रेल्वे पथ पर F_2 बल का दबाव डालती है, तब

(a) $F_1 > F_2$

(b) $F_1 < F_2$

(c) $F_1 = F_2$

(d) F_1 व F_2 के बीच सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए सूचनाएँ अपर्याप्त हैं।

Solution : (a) हम जानते हैं कि पृथ्वी अपनी अक्ष पर पश्चिम से पूर्व की ओर चक्कर लगाती है। माना कि पृथ्वी का कोणीय वेग ω_e तथा ट्रेन का कोणीय वेग ω_t है

ट्रेन A के लिए : कुल कोणीय चाल = $(\omega_e - \omega_t)$ क्योंकि ट्रेन की गति, पृथ्वी की गति की दिशा के विपरीत है।

अतः A के पथ पर प्रतिक्रिया $R_1 = F_1 = mg - m(\omega_e - \omega_t)^2 R$

ट्रेन B के लिए : कुल कोणीय चाल = $(\omega_e + \omega_t)$ क्योंकि ट्रेन का घूर्णन पृथ्वी के घूर्णन के समान है।

अतः B के पथ पर प्रतिक्रिया $R_2 = F_2 = mg - m(\omega_e + \omega_t)^2 R$

अतः यह स्पष्ट है कि $F_1 > F_2$

चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की गति

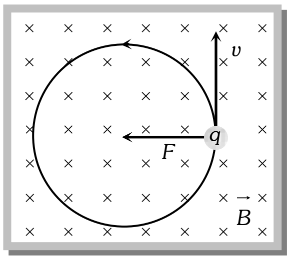
जब एक आवेशित कण, जिसका द्रव्यमान m तथा आवेश q है, चुम्बकीय क्षेत्र B में v वेग से क्षेत्र के अभिलंबवत् प्रवेश करता है, तब यह r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में गति करता है।

चूँकि चुम्बकीय बल (qvB), v के लंबवत् कार्यरत रहता है अतः यह आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है।

चुम्बकीय बल = अभिकेन्द्रीय बल

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

∴ वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या $r = \frac{mv}{qB}$

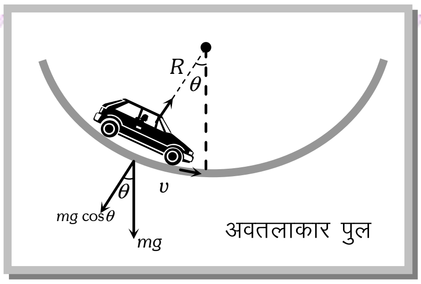


कार पर सड़क मार्ग की प्रतिक्रिया

(1) जब कोई कार किसी अवतल पुल से गुजरती है, तब

अभिकेन्द्रीय बल = $R - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$

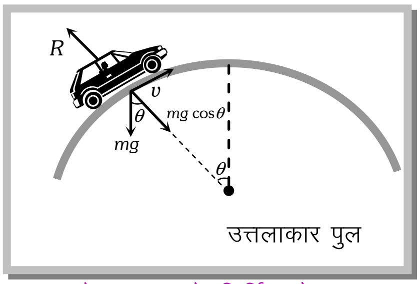
तथा प्रतिक्रिया $R = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{r}$



(2) जब कार उत्तलाकार पुल से गुजरती है। तब

अभिकेन्द्रीय बल = $mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{r}$

तथा प्रतिक्रिया $R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{r}$



Problem 139. किसी नहर पर निर्मित सड़क मार्गीय पुल एक $20m$ त्रिज्या वाले वृत्त के चाप के आकार में निर्मित है। इस पुल से गुजरने वाली किसी कार का न्यूनतम वेग क्या होना चाहिए, जिससे कि वह पुल के शीर्ष बिन्दु से सतह से संपर्क छोड़े बिना पुल पार कर सके $(g = 9.8\ m/s^2)$

(a) $7\ m/s$ (b) $14\ m/s$ (c) $289\ m/s$ (d) $5\ m/s$

Solution : (b) पुल के शीर्ष बिन्दु पर, क्रांतिक स्थिति में $mg - \frac{mv^2}{r} = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = mg$

$\therefore v_{\max} = \sqrt{gr} = \sqrt{9.8 \times 20} = \sqrt{196} = 14\, m/s$

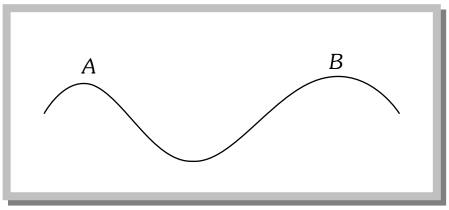
Problem 140. एक कार सड़क पर नियत वेग से चल रही है। जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है। जब यह बिन्दु A तथा B पर है, तब सड़क मार्ग द्वारा कार पर लगा अभिलंब बल क्रमशः N_A तथा N_B है तब

(a) $N_A = N_B$

(b) $N_A > N_B$

(c) $N_A < N_B$

(d) उपरोक्त में से सभी स्थितियाँ सम्भव हैं



Solution : (c) सूत्र $N = mg - \frac{mv^2}{r}$ से $\therefore N \propto r$

चूँकि $r_A < r_B$ $\therefore N_A < N_B$

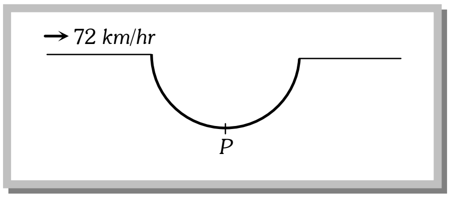
Problem 141. एक कार $72\, km/hr$ की चाल से गति कर रही है, तथा यह सड़क के वक्राकार भाग से गुजरती है, जिसकी त्रिज्या $10 m$ है। यदि कार का द्रव्यमान $500\, kg$ है, तब वक्र के निम्नतम बिन्दु P पर कार पर प्रतिक्रिया होगी

(a) 25 *kN*

(b) 50 *kN*

(c) 75 *kN*

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं



Solution : (a) $v = 72 \frac{km}{h} = 20\, m/s, \quad r = 10\, m, \quad m = 500\, kg$ (दिया है)

निम्न बिन्दु P पर प्रतिक्रिया $R = mg + \frac{mv^2}{r}$

$$= 500 \times 10 + \frac{500 \times (20)^2}{10} = 25000\, N = 25\, KN$$

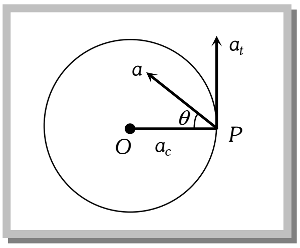
असमान वृत्तीय गति

यदि किसी कण की चाल क्षैतिज वृत्तीय गति में समय के साथ परिवर्तित होती है, तब उसकी गति असमान वृत्तीय गति कहलाती है।

माना कि कोई कण r त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग में गति कर रहा है। वृत्त का केन्द्र O है। माना किसी क्षण पर कण P बिन्दु पर है, तथा इसका रेखीय वेग $\vec{v}$ तथा कोणीय वेग $\vec{\omega}$ है,

तब, $\vec{v} = \omega \times r$ .....(i)

समय t के सापेक्ष दोनों ओर अवकलन करने पर



$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times r + \omega \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ .....(ii) यहाँ, $\frac{d\vec{v}}{dt} = a$, (परिणामी त्वरण)

$a = \alpha \times r \quad + \quad \omega \times \vec{v}$ $\qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \alpha$ (कोणीय त्वरण)

$a = \quad a_t \quad + \quad a_c$ .....(iii) $\qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ (रेखीय वेग)

इस प्रकार कण के परिणामी त्वरण के दो घटक होते हैं:

(1) **स्पर्शीय त्वरण :** $\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

यह वृत्तीय मार्ग के समतल में स्थित बिन्दु P की स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है।

दाँयें हाथ के नियम के अनुसार चूँकि α और r परस्पर अभिलम्बवत् हैं, अतः स्पर्शीय त्वरण का मान निम्न प्रकार से दिया जा सकता है।

$$|\vec{a_t}| = |\vec{\alpha} \times \vec{r}| = \alpha r \sin 90^o = \alpha r.$$

(2) **अभिकेन्द्रीय (त्रिज्यीय) त्वरण :** $\vec{a_c} = \vec{\omega} \times \vec{v}$

यह बिन्दु P पर कण का अभिकेन्द्रीय त्वरण कहलाता है।

यह बिन्दु P पर कण की त्रिज्या के अनुदिश कार्य करता है।

दाँयें हाथ के नियम के अनुसार चूँकि $\vec{\omega}$ और $\vec{v}$ परस्पर अभिलम्बवत् होते हैं, अतः अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण इस प्रकार दिया जा सकता है

$$|a_c| = |\omega \times \vec{v}| = \omega v \sin 90^o = \omega v = \omega(\omega r) = \omega^2 r = v^2 / r$$

(3) **विभिन्न गतियों में स्पर्शीय तथा अभिकेन्द्रीय त्वरण**

अभिकेन्द्रीय त्वरण	स्पर्शीय त्वरण	कुल त्वरण	गति का प्रकार
$a_c = 0$	$a_t = 0$	$a = 0$	एकसमान स्थानांतरीय गति
$a_c = 0$	$a_t \neq 0$	$a = a_t$	त्वरित स्थानांतरीय गति
$a_c \neq 0$	$a_t = 0$	$a = a_c$	एकसमान वृत्तीय गति
$a_c \neq 0$	$a_t \neq 0$	$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$	असमान वृत्तीय गति

❑ यहाँ a_t, $\vec{v}$ के परिमाण से तथा $\vec{a_c}$, गति की दिशा से सम्बन्धित है।

(4) **बल :** असमान वृत्तीय गति में, कण पर एक साथ दो बल कार्य करते हैं

अभिकेन्द्रीय बल : $F_c = ma_c = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$

स्पर्शीय बल : $F_t = ma_t$

कुल बल : $F_{net} = ma = m\sqrt{a_c^2 + a_t^2}$

❑ असमान वृत्तीय गति में अभिकेन्द्रीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होगा क्योंकि $F_c \perp v$

- असमान वृत्तीय गति में स्पर्शीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य नहीं होगा क्योंकि $F_t \neq 0$
- वृत्तीय गति में कुल बल द्वारा किये गए कार्य की दर = स्पर्शीय बल द्वारा किये गए कार्य की दर

अर्थात् $P = \frac{dW}{dt} = F_t.v$

Problem 142. R त्रिज्या के वृत्त के अनुदिश गतिमान किसी कण की गतिज ऊर्जा k तय की गई दूरी पर निर्भर करती है। यह इस प्रकार दी जाती है कि $K.E. = as^2$ जहाँ a नियतांक है, कण पर लगने वाला बल है [MNR 1992; JIPMER 2001, 2002]

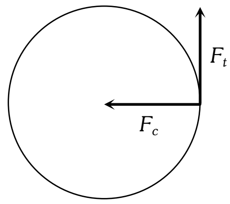
(a) $2a\frac{s^2}{R}$ (b) $2as\left(1+\frac{s^2}{R^2}\right)^{1/2}$ (c) $2as$ (d) $2a\frac{R^2}{s}$

Solution : (b) असमान वृत्तीय गति में, कण पर दो बल F_c तथा F_t कार्य करते हैं।

कुल बल $F_{Net} = \sqrt{F_c^2 + F_t^2}$ ....(i)

अभिकेन्द्रीय बल $F_c = \frac{mv^2}{R} = \frac{2as^2}{R}$ ....(ii) [क्योंकि गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2 = as^2$ दिया है]

पुनः : $\frac{1}{2}mv^2 = as^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2as^2}{m} \Rightarrow v = s\sqrt{\frac{2a}{m}}$



स्पर्शीय त्वरण $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt} \Rightarrow a_t = \frac{d}{ds}\left[s\sqrt{\frac{2a}{m}}\right].v$

$a_t = v\sqrt{\frac{2a}{m}} = s\sqrt{\frac{2a}{m}}\sqrt{\frac{2a}{m}} = \frac{2as}{m}$

और $F_t = ma_t = 2as$ ....(iii)

समीकरण (i) में F_c तथा F_t के मान रखने पर $\therefore F_{कुल} = \sqrt{\left(\frac{2as^2}{R}\right)^2 + (2as)^2} = 2as\left[1+\frac{s^2}{R^2}\right]^{1/2}$

Problem 143. m द्रव्यमान का एक कण नियत त्रिज्या r के वृत्ताकार मार्ग में इस प्रकार गति कर रहा है कि इसका अभिकेन्द्रीय त्वरण समय t के साथ $a_c = k^2rt^2$ के अनुसार परिवर्तित होता है। जहाँ k एक नियतांक है। कण पर लग रहे बलों द्वारा कण को प्रदत्त शक्ति है [IIT-JEE 1994]

(a) $2\pi mk^2r^2t$ (b) mk^2r^2t (c) $\frac{mk^4r^2t^5}{3}$ (d) शून्य

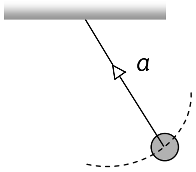
Solution : (b) $a_c = k^2rt^2 \Rightarrow \frac{v^2}{r} = k^2rt^2 \Rightarrow v^2 = k^2r^2t^2 \Rightarrow v = krt$

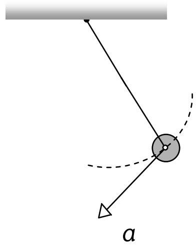
स्पर्शीय त्वरण $a_t = \frac{dv}{dt} = kr$

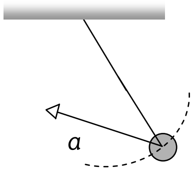
चूँकि अभिकेन्द्रीय बल द्वारा वृत्तीय गति में किया गया कार्य शून्य होता है

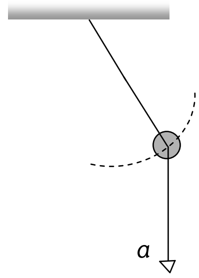
अतः स्पर्शी बल द्वारा प्रदत्त शक्ति $= P = F_t v = ma_t v = m(kr)\,krt = mk^2r^2t$

Problem 144. एक सरल लोलक नियत आयाम से दोलन कर रहा है जब गोलक का विस्थापन, इसके अधिकतम मान से कम है उस स्थिति में इसका त्वरण सदिश सदिश a सही रूप में दिखाया गया है [IIT-JEE Screening 2002]

(a) 

(b) 

(c) 

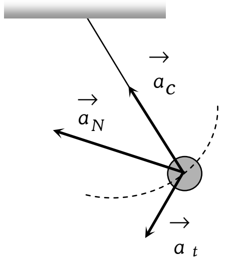
(d) 

Solution : (c) a_c = अभिकेन्द्रीय त्वरण,

a_t = स्पर्शीय त्वरण,

a_N = परिणामी त्वरण = a_c एवं a_t का परिणामी

$a_N = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$



Problem 145. 0.1m त्रिज्या के वृत्त में गति कर रहे किसी कण का वेग $v = 1.0t$ है, जहाँ t सैकण्ड में समय है। $t = 5s$ पर कण का परिणामी त्वरण होगा

(a) $10\ m/s^2$ (b) $100\ m/s^2$ (c) $250\ m/s^2$ (d) $500\ m/s^2$

Solution : (c) $v = 1.0t \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = 1 m/s^2$

और $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(5)^2}{0.1} = 250 m/s^2$ [क्योंकि $t = 5\,sec$, $v = 5\,m/s$]

$\therefore a_N = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(250)^2 + 1^2} \Rightarrow a_N = 250 m/s^2$ (लगभग)

Problem 146. एक कण वृत्तीय पथ के अनुदिश v वेग से गति कर रहा है तथा इसकी चाल 1 सैकण्ड में 'g' बढ़ जाती है। यदि वृत्तीय पथ की त्रिज्या r है, तब कण का कुल त्वरण होगा

(a) $\frac{v^2}{r} + g$ (b) $\frac{v^2}{r^2} + g^2$ (c) $\left[\frac{v^4}{r^2} + g^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (d) $\left[\frac{v^2}{r} + g\right]^{\frac{1}{2}}$

Solution : (c) $a_t = g$ (दिया गया है) तथा $a_c = \frac{v^2}{r}$ अतः $a_N = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + g^2} = \sqrt{\frac{v^4}{r^2} + g^2}$

Problem 147. एक कार 500 m की त्रिज्या वाले वृत्ताकार मार्ग पर 30 m/sec की चाल से गति कर रही है। इसकी चाल 2m/sec^2 की दर से बढ़ रही है। कार का त्वरण है [Roorkee 1982; RPET 1996; MH CET 2002; MP PMT 2003]

(a) 2 m/s^2 (b) 2.7 m/s^2 (c) 1.8 m/s^2 (d) 9.8 m/s^2

Solution : (b) $a_t = 2m/s^2$ तथा $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{30 \times 30}{500} = 1.8 m/s^2$ $\therefore a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{2^2 + (1.8)^2} = 2.7 m/s^2$

Problem 148. वृत्तीय गति करते किसी कण के लिए अभिकेन्द्रीय त्वरण होता है [CPMT 1998]

(a) स्पर्शी त्वरण से कम (b) स्पर्शी त्वरण के बराबर

(c) स्पर्शी त्वरण से अधिक (d) स्पर्शी त्वरण से अधिक या कम, कुछ भी हो सकता है

Solution : (d)

Problem 149. एक कण 3 meter त्रिज्या के वृत्ताकार पथ के अनुदिश इस प्रकार गति कर रहा है कि परिधि के अनुदिश उसके द्वारा तय की गई दूरी का समीकरण $S=\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$ से दिया जाता है, कण का त्वरण $t=2$ sec पर होगा

(a) 1.3 m/s² (b) 13 m/s² (c) 3 m/s² (d) 10 m/s²

Solution : (b) $s=\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3} \Rightarrow v=\frac{ds}{dt}=t+t^2$ तथा $a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(t+t^2)=1+2t$

$t=2\,sec$ पर, $v=6\,m/s$ तथा $a_t=5\,m/s^2$, $a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{36}{3}=12\,m/s^2$

$a_N=\sqrt{a_c^2+a_t^2}=\sqrt{(12)^2+(5)^2}=13\,m/s^2$

वृत्तीय गति के समीकरण

त्वरित गति के लिए	अवमंदित गति के लिए
$\omega_2=\omega_1+\alpha t$	$\omega_2=\omega_1-\alpha t$
$\theta=\omega_1 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$	$\theta=\omega_1 t-\frac{1}{2}\alpha t^2$
$\omega_2^2=\omega_1^2+2\alpha\theta$	$\omega_2^2=\omega_1^2-2\alpha\theta$
$\theta_n=\omega_1+\frac{\alpha}{2}(2n-1)$	$\theta_n=\omega_1-\frac{\alpha}{2}(2n-1)$

जहाँ

ω_1 = कण का प्रारम्भिक कोणीय वेग

ω_2 = कण का अंतिम कोणीय वेग

α = कण का कोणीय त्वरण

θ = t समय में घूमा गया कोण

θ_n = nवें सैकण्ड में घूमा गया कोण

Problem 150. किसी कण का कोणीय वेग $\omega=1.5\,t-3t^2+2$ से प्रदर्शित किया जाता है। वह समय जब इसका कोणीय त्वरण शून्य हो जाता है, होगा

(a) 25 sec (b) 0.25 sec (c) 12 sec (d) 1.2 sec

Solution : (b) $\omega=1.5t-3t^2+2$ अतः $\alpha=\frac{d\omega}{dt}=1.5-6t \Rightarrow 0=1.5-6t \therefore t=\frac{1.5}{6}=0.25\,\text{sec}$

Problem 151. एक पहिया अपनी अक्ष के चारों ओर एकसमान कोणीय त्वरण से गति करता है। इसका प्रारम्भिक कोणीय वेग शून्य है। प्रथम $2\,\text{sec}$ में यह θ_1 कोण से घूम जाता है। अगले $2\,\text{sec}$ में यह एक अन्य अतिरिक्त कोण θ_2 से घूमता है। θ_1/θ_2 का अनुपात होगा [AIIMS 1982]

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5

Solution : (c) गति के समीकरण $\theta=\omega_1 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$ से

$\theta_1=0+\frac{1}{2}\alpha(2)^2=2\alpha$ .....(i) [क्योंकि $\omega_1=0,\ t=2\,\text{sec},\ \theta=\theta_1$]

दूसरी स्थिति में

$\theta_1+\theta_2=0+\frac{1}{2}\alpha(4)^2$ [क्योंकि $\omega_1=0,\ t=2+2=4\,\text{sec},\ \theta=\theta_1+\theta_2$]

$\theta_1+\theta_2=8\alpha$ ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से $\theta_1 = 2\alpha,\ \theta_2 = 6\alpha\ \therefore \frac{\theta_2}{\theta_1} = 3$

Problem 152. यदि किसी वृत्ताकार पथ पर गति कर रहे कण का विस्थापन समीकरण $(\theta) = 2t^3 + 0.5$ है, जहाँ θ रेडियन में तथा t सैकण्ड में है, तब प्रारम्भ से $2\,sec$ पश्चात् कण का कोणीय वेग होगा [AIIMS 1998]

(a) $8\ rad/sec$ (b) $12\ rad/sec$ (c) $24\ rad/sec$ (d) $36\ rad/sec$

Solution : (c) $\theta = 2t^3 + 0.5$ तथा $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 6t^2$

$t = 2\ sec$ पर, $\omega = 6(2)^2 = 24\ rad/sec$

Problem 153. एक पहिए का कोणीय वेग प्रारम्भ में 5 *sec* में 20 *rad/sec* हो जाता है। पहिए के चक्करों की संख्या होगी

(a) $\frac{\pi}{25}$ *rev/sec* (b) $\frac{1}{\pi}$ *rev/sec* (c) $\frac{25}{\pi}$ *rev/sec* (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (c) $\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 20\ rad/sec,\ t = 5\ sec$

$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{20-0}{5} = 4\ rad/sec^2$

अब समीकरण $\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}(4).(5)^2 = 50\ rad$

2π रेडियन $= 1$ चक्कर/सै. $\therefore$ 50 रेडियन $= \frac{50}{2\pi}$ या $\frac{25}{\pi}$ चक्कर/सै.

Problem 154. एक पत्थर विरामावस्था से गति प्रारम्भ कर नियत कोणीय त्वरण 4.0 rad/sec^2 से वृत्तीय गति करता है। 4 *sec* पश्चात् कोणीय विस्थापन तथा कोणीय वेग क्रमशः होंगे

(a) 32 *rad*, 16 *rad/sec* (b) 16 *rad*, 32 *rad/sec* (c) 64 *rad*, 32 *rad/sec* (d) 32 *rad*, 64 *rad/sec*

Solution : (a) $\omega_1 = 0,\ \alpha = 4\ rad/sec^2,\ t = 4\ sec$

कोणीय विस्थापन $\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}4(4)^2 = 32\ rad.$

$\therefore$ कोणीय वेग $\omega_2 = \omega_1 + \alpha t = 0 + 4\times 4 = 16\ rad/sec$

Problem 155. एक विद्युत पंखा 600 *rev/minute* की चाल से घूर्णन कर रहा है। जब विद्युत प्रदाय बंद कर दिया जाता है, यह 60 चक्कर पश्चात् विरामावस्था में आता है। पंखे के विरामावस्था में आने में लगा समय है

(a) 12 *s* (b) 30 *s* (c) 45 *s* (d) 60 *s*

Solution : (a) $\omega_1 = 600\ rev/\min = 10\ rev/sec,\ \omega_2 = 0$ and $\theta = 60\ rev$

समीकरण $\omega_2^2 = \omega_1^2 - 2\alpha\theta$ से $\Rightarrow 0 = (10)^2 - 2\alpha 60\ \therefore \alpha = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$

पुनः $\omega_2 = \omega_1 - \alpha t \Rightarrow 0 = \omega_1 - \alpha t$

$t = \frac{\omega_1}{\alpha} = \frac{10\times 6}{5} = 12\ sec$

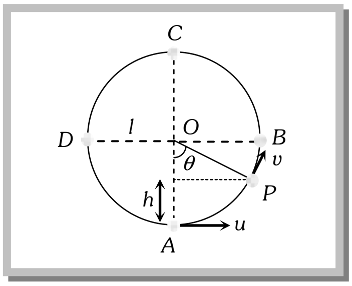
ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति

यह असमान वृत्तीय गति का एक उदाहरण है। इस गति में वस्तु पृथ्वी के गुरुत्व के प्रभाव में गति करती है। जब वस्तु वृत्त के निम्नतम बिन्दु से उच्चतम बिन्दु की ओर गति करती है, इसकी चाल घटती है। तथा उच्चतम बिन्दु पर यह न्यूनतम हो जाती है। वस्तु की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है, तथा गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा में व स्थितिज ऊर्जा गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होती रहती है।

(1) **ऊर्ध्वाधर लूप के किसी बिन्दु पर वेग :** यदि u निम्नतम बिन्दु पर वस्तु का प्रारम्भिक वेग है, तब h ऊँचाई पर वस्तु का वेग दिया जाता है

$$v = \sqrt{u^2 - 2gh} = \sqrt{u^2 - 2gl(1-\cos\theta)}$$ [क्योंकि $h = l - l\cos\theta = l\,(1-\cos\theta)$]

जहाँ l डोरी की लम्बाई है।

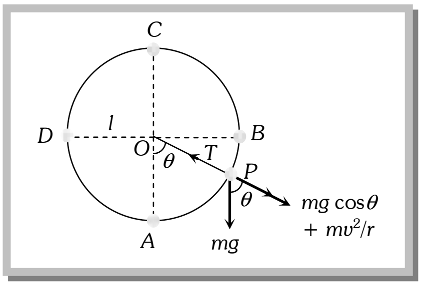


(2) **ऊर्ध्वाधर लूप के किसी बिन्दु पर तनाव :** न्यूटन की गति के द्वितीय नियम से किसी बिन्दु P पर तनाव

केन्द्र की ओर कुल बल = अभिकेन्द्रीय बल

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l} \quad \text{अथवा} \quad T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l}$$

$$T = \frac{m}{l}[u^2 - gl(2 - 3\cos\theta)] \quad [v = \sqrt{u^2 - 2gl(1-\cos\theta)}\,]$$



(3) **ऊर्ध्वाधर लूप की विभिन्न स्थितियों में वेग तथा तनाव**

स्थिति	कोण	वेग	तनाव
A	0°	u	$\frac{mu^2}{l} + mg$
B	90°	$\sqrt{u^2 - 2gl}$	$\frac{mu^2}{l} - 2mg$
C	180°	$\sqrt{u^2 - 4gl}$	$\frac{mu^2}{l} - 5mg$
D	270°	$\sqrt{u^2 - 2gl}$	$\frac{mu^2}{l} - 2mg$

सारणी से स्पष्ट है : $T_A > T_B > T_C$ तथा $T_B = T_D$

$$T_A - T_B = 3mg,$$

$$T_A - T_C = 6mg$$

तथा $T_B - T_C = 3mg$

(4) ऊर्ध्वाधर गति की विभिन्न स्थितियाँ

निम्नतम बिन्दु पर वेग	स्थिति
$u_A > \sqrt{5gl}$	किसी भी बिन्दु पर डोरी का तनाव शून्य नहीं होगा तथा वस्तु वृत्तीय गति करती है।
$u_A = \sqrt{5gl}$,	उच्चतम बिन्दु C पर तनाव शून्य होगा तथा वस्तु ठीक एक वृत्त पूर्ण करती है।
$\sqrt{2gl} < u_A < \sqrt{5gl}$,	कण वृत्तीय गति नहीं करेगा। डोरी में तनाव B तथा C बिन्दुओं के बीच शून्य होगा जबकि वेग धनात्मक रहेगा। कण वृत्तीय पथ को छोड़कर परवलयाकार मार्ग में गति करता है।
$u_A = \sqrt{2gl}$	A तथा B बिन्दुओं के बीच डोरी में तनाव तथा कण का वेग दोनों शून्य हो जाते हैं तथा कण अर्द्धवृत्ताकार पथ के अनुदिश दोलन करता है।
$u_A < \sqrt{2gl}$	कण का वेग A तथा B बिन्दुओं के बीच शून्य हो जाता है किन्तु तनाव शून्य नहीं होगा तथा कण A बिन्दु के सापेक्ष दोलन करता है।

- क्षैतिज वृत्त में गति करती हुई वस्तु की गतिज ऊर्जा संपूर्ण मार्ग में एकसमान रहती है, किन्तु ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति करती हुई वस्तु की गतिज ऊर्जा भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर भिन्न होती है।
- यदि m द्रव्यमान की किसी वस्तु को l लंबाई की डोरी से बाँधकर क्षैतिज वेग u से प्रक्षेपित किया जाता है, तब वह ऊँचाई, जहाँ पर वेग शून्य हो जाता है $h = \dfrac{u^2}{2g}$

  वह ऊँचाई जहाँ तनाव शून्य हो जाता है $h = \dfrac{u^2 + gl}{3g}$

(5) ऊर्ध्वाधर लूपिंग की क्रांतिक स्थिति : यदि बिन्दु C पर तनाव शून्य है, तब वस्तु ऊर्ध्वाधर वृत्त का ठीक एक चक्कर पूर्ण करती है। वस्तु की यह अवस्था क्रांतिक अवस्था कहलाती है। क्रांतिक अवस्था में वस्तु की चाल को क्रांतिक चाल कहा जाता है।

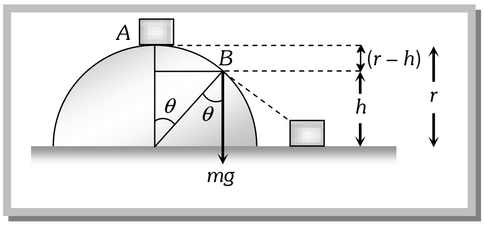
उपरोक्त सारणी से $T_C = \dfrac{mu^2}{l} - 5mg = 0 \Rightarrow u = \sqrt{5gl}$

इसका अर्थ है, कि वस्तु को ऊर्ध्वाधर वृत्त पूर्ण करने के लिए, वृत्त के निम्नतम बिन्दु पर वस्तु का न्यूनतम वेग $\sqrt{5gl}$ होना चाहिये।

(6) क्रांतिक स्थिति में ऊर्ध्वाधर वृत्त की विभिन्न स्थितियों में विभिन्न राशियों के मान

राशि	बिन्दु A	बिन्दु B	बिन्दु C	बिन्दु D	बिन्दु P
रेखीय वेग (v)	$\sqrt{5gl}$	$\sqrt{3gl}$	$\sqrt{gl}$	$\sqrt{3gl}$	$\sqrt{gl(3+2\cos\theta)}$
कोणीय वेग (ω)	$\sqrt{\frac{5g}{l}}$	$\sqrt{\frac{3g}{l}}$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$	$\sqrt{\frac{3g}{l}}$	$\sqrt{\frac{g}{l}(3+2\cos\theta)}$
स्प्रिंग में तनाव (T)	$6\ mg$	$3\ mg$	0	$3\ mg$	$3mg(1+\cos\theta)$
गतिज ऊर्जा (KE)	$\frac{5}{2}mgl$	$\frac{3}{2}mgl$	$\frac{1}{2}mgl$	$\frac{3}{2}mgl$	$\frac{mgl}{2}(3+2\cos\theta)$
स्थितिज ऊर्जा (PE)	0	mgl	$2\ mgl$	mgl	$mgl(1-\cos\theta)$
कुल ऊर्जा (TE)	$\frac{5}{2}mgl$	$\frac{5}{2}mgl$	$\frac{5}{2}mgl$	$\frac{5}{2}mgl$	$\frac{5}{2}mgl$

(7) **घर्षणहीन अर्द्धगोले पर गुटके की गति** : m द्रव्यमान का एक छोटा गुटका अथवा पिण्ड r त्रिज्या के घर्षणहीन अर्द्धगोले के शीर्ष से नीचे की ओर फिसलता है। गुरुत्वीय बल का घटक ($mg\cos\theta$) गति हेतु आवश्यक अभिकेंद्रीय बल प्रदान करता है, किन्तु बिंदु B पर इसकी वृत्तीय गति समाप्त हो जाती है, तथा गुटका अर्द्धगोले की सतह से संपर्क छोड़ देता है।



बिन्दु B पर, बलों की साम्यावस्था में $mg\cos\theta = \dfrac{mv^2}{r}$ .....(i)

बिन्दु A तथा बिन्दु B पर, ऊर्जा संरक्षण के नियम से

बिन्दु A पर कुल ऊर्जा = बिन्दु B पर कुल ऊर्जा

$K.E._{(A)} + P.E._{(A)} = K.E._{(B)} + P.E._{(B)}$

$$0 + mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \Rightarrow v = \sqrt{2g(r-h)} \quad .....(ii)$$

तथा दिये गये चित्र से, $h = r\cos\theta$ .....(iii)

समीकरण (ii) तथा (iii) से v तथा h के मान समीकरण (i) में रखने पर

$$mg\left(\frac{h}{r}\right) = \frac{m}{r}\left(\sqrt{2g(r-h)}\right)^2$$

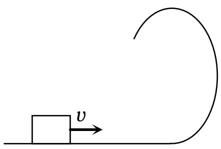
$$\Rightarrow \quad h = 2(r-h) \Rightarrow h = \frac{2}{3}r$$

अर्थात् पिण्ड, जमीन से $\frac{2}{3}r$ की ऊँचाई पर गोले से संपर्क छोड़ता है।

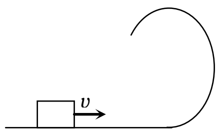
ऊर्ध्वाधर से बनने वाला कोण, $\cos\theta = \frac{h}{r} = \frac{2}{3}$ $\quad \therefore \ \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3}$

Problem 156. एक छोटा गुटका चित्र में प्रदर्शित चार विभिन्न पथों पर गति करता है। प्रत्येक पथ की ऊँचाई समान है। वह वेग, जिससे गुटका इन मार्गों पर प्रवेश करता है, सभी स्थितियों में समान है। किस मार्ग के उच्चतम बिन्दु पर अभिलंब प्रतिक्रिया अधिकतम होगी [IIT-JEE (Screening) 2001]

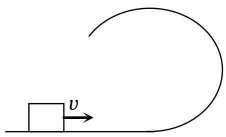
(a)



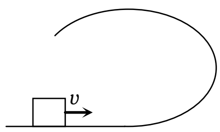
(b)



(c)



(d)



Solution : (a) मार्ग के उच्चतम बिन्दु पर अभिलंब प्रतिक्रिया $R = \dfrac{mv^2}{r} - mg$

R के अधिकतम होने के लिए, वक्रता त्रिज्या (r) न्यूनतम होनी चाहिए। वक्रता त्रिज्या प्रथम स्थिति में न्यूनतम है।

Problem 157. एक पत्थर को डोरी से बाँधकर ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है। न्यूनतम वेग, जिससे डोरी को घुमाया जाता है [EAMCET (Engg.) 1998; CBSE PMT 1999]

(a) पत्थर का द्रव्यमान बढ़ने के साथ घटता है
(b) पत्थर के द्रव्यमान से स्वतंत्र होता है
(c) डोरी की लंबाई बढ़ाने पर घटता है
(d) डोरी की लंबाई पर निर्भर नहीं करता

Solution : (b) ऊर्ध्वाधर वृत्त के निम्नतम बिन्दु पर वेग $v = \sqrt{5gr}$

$\Rightarrow v \propto m^0$ अर्थात् यह वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

Problem 158. एक द्रव्यमान m को 20 cms लंबी डोरी के सिरे से बाँधकर ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है। वृत्त के निम्नतम बिन्दु पर डोरी में तनाव उच्चतम बिन्दु के तनाव से कितना अधिक होगा

(a) $2\ mg$ (b) $4\ mg$ (c) $6\ mg$ (d) $8\ mg$

Solution : (c) $T_{\text{निम्न बिन्दु}} - T_{\text{उच्च बिन्दु}} = 6mg$ (हमेशा)

Problem 159. किसी साधारण लोलक में, डोरी की त्रोटन सामर्थ्य गोलक के भार की दुगुनी है। जब डोरी क्षैतिज अवस्था में होती है। तब गोलक को विरामावस्था से छोड़ा जाता है। ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाने पर डोरी टूट जायेगी, यदि

(a) $\theta = \cos^{-1}(1/3)$ (b) $\theta = 60^o$ (c) $\theta = \cos^{-1}(2/3)$ (d) $\theta = 0^o$

Solution : (c) माना कि डोरी बिन्दु B पर टूटती है

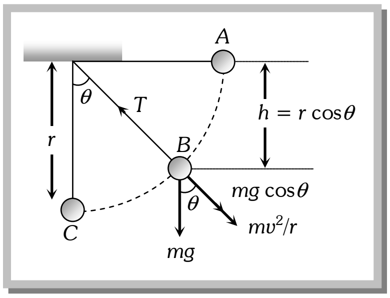
तनाव $= mg\cos\theta + \frac{mv_B^2}{r} =$ त्रोटन सामर्थ्य

$= mg\cos\theta + \frac{mv_B^2}{r} = 2mg$ ....(i)

यदि गोलक को विरामावस्था (बिन्दु A) से छोड़ा जाता है, तब B बिन्दु पर इसका वेग

$v_B = \sqrt{2gh}$

$v_B = \sqrt{2gr\cos\theta}$ ....(ii) [जहाँ $h = r\cos\theta$]

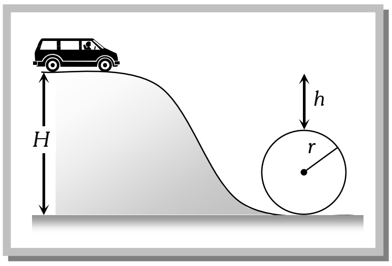


इस मान को समीकरण (i) में रखने पर

$mg\cos\theta + \frac{m}{r}(2gr\cos\theta) = 2mg$

या $3mg\cos\theta = 2mg \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}\ \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

Problem 160. एक खिलौना कार किसी नतसमतल पर नीचे की ओर फिसलती है, तथा निम्नतम बिन्दु पर यह लूप मार्ग को पूर्ण करती है। H तथा h के बीच संबंध है



(a) $\frac{H}{h} = 2$ (b) $\frac{H}{h} = 3$ (c) $\frac{H}{h} = 4$ (d) $\frac{H}{h} = 5$

Solution : (d) जब कार H ऊँचाई के नतसमतल से नीचे लुढ़कती है, तब निम्नतम बिन्दु पर इसका वेग

$v = \sqrt{2gH}$ ....(i)

तथा लूपिंग हेतु, निम्नतम बिन्दु पर आवश्यक वेग $v = \sqrt{5gr}$ ....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{5gr}\ \therefore H = \frac{5r}{2}$ ....(iii)

चित्र से $H = h + 2r \Rightarrow r = \frac{H-h}{2}$

समीकरण (iii) में r का यह मान प्रतिस्थापित करने पर $H = \frac{5}{2}\left[\frac{H-h}{2}\right] \Rightarrow \frac{H}{h} = 5$

Problem 161. L लंबाई के एक साधारण लोलक के गोलक का द्रव्यमान m है। यदि गोलक को इसकी क्षैतिज स्थिति से छोड़ा जाता है, तब गोलक का वेग तथा गोलक की निम्नतम स्थिति में डोरी में तनाव क्रमशः होंगे

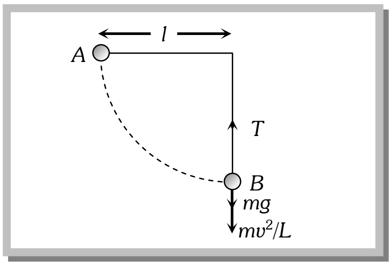
(a) $\sqrt{2gL}$ तथा $3mg$ (b) $3mg$ तथा $\sqrt{2gL}$ (c) $2mg$ तथा $\sqrt{2gl}$ (d) $2gl$ तथा $3mg$

Solution : (a) ऊर्जा संरक्षण के नियम से

बिन्दु A पर स्थितिज ऊर्जा = बिन्दु B पर गतिज ऊर्जा

$mgl = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gl}$

तथा तनाव $= mg + \frac{mv^2}{l} \Rightarrow T = mg + \frac{m}{l}(2gl) \Rightarrow T = 3mg$



Problem 162. m द्रव्यमान के एक पिण्ड को डोरी से बाँधकर r त्रिज्या के ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है। यह एक मिनट में n चक्कर पूर्ण करता है। जब पिण्ड निम्नतम बिन्दु पर है, तब डोरी में कुल तनाव है [Kerala (Engg.) 2001]

(a) $m\{g + (\pi^2 n^2 r)/900\}$ (b) $m(g + \pi nr^2)$ (c) $m(g + \pi nr)$ (d) $m(g + n^2r^2)$

Solution : (a) निम्नतम बिन्दु पर तनाव $T = mg + m\omega^2 r = mg + m4\pi^2 n^2 r$

यदि एक मिनट में पिण्ड द्वारा लगाये गये चक्करों की संख्या n है, तब

$$T = mg + m4\pi^2 \frac{n^2}{3600} r = mg + \frac{m\pi^2 n^2 r}{900} = m\left[g + \frac{\pi^2 n^2 r}{900}\right]$$

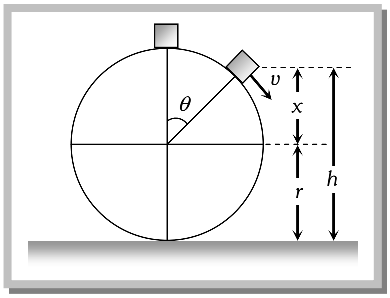
Problem 163. एक कण 42m व्यास के गोले के शीर्ष पर विरामावस्था में रखा है। इसे थोड़ा सा विस्थापित करने पर यह नीचे की ओर फिसलता है। निम्नतम सतह से कितनी ऊँचाई पर कण गोले से संपर्क छोड़ देगा [IMS-BHU 2003]

(a) 14 m (b) 28 m (c) 35 m (d) 7 m

Solution : (c) माना कण जमीन से h ऊँचाई पर गोले से अलग होता है

दी गई स्थिति के लिए हम जानते हैं कि $x = \frac{2}{3}r$

चित्र से $h = r + x = r + \frac{2}{3}r = \frac{5}{3}r = \frac{5}{3} \times 21 = 35\,m$ [जहाँ r = 21 m]

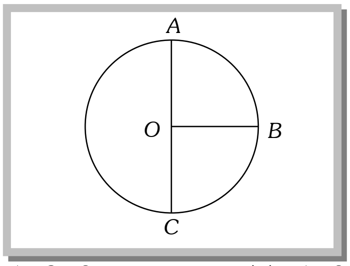


Problem 164. एक बाल्टी को 1.6 m लम्बी डोरी के एक सिरे से बाँधकर नियत चाल से ऊर्ध्वाधर वृत्त में तेजी से घुमाया जाता है। वह न्यूनतम वेग क्या होगा जिससे उच्चतम बिन्दु पर बाल्टी से पानी न गिरे (g = 10 m/sec^2) [AIIMS 1987]

(a) $4 m/sec$ (b) $6.25 m/sec$ (c) $16 m/sec$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

Solution : (a) $v = \sqrt{gr} = \sqrt{10 \times 1.6} = \sqrt{16} = 4\, m/s$

Problem 165. ऊर्ध्वाधर वृत्तीय गति में बिन्दुओं A, B तथा C पर वेगों का अनुपात है



(a) 1 : 9 : 25 (b) 1 : 2 : 3 (c) 1 : 3 : 5 (d) $1 : \sqrt{3} : \sqrt{5}$

Solution : (d) $v_A : v_B : v_c = \sqrt{gr} : \sqrt{3gr} : \sqrt{5gr} = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{5}$

Problem 166. R त्रिज्या के ऊर्ध्वाधर वृत्त के निम्नतम बिन्दु पर किसी कण का न्यूनतम वेग 'v' है। यदि वृत्त की त्रिज्या प्रारंभिक त्रिज्या की एक चौथाई कर दी जाये, तब न्यूनतम वेग होगा [EAMCET (Engg.) 1999]

(a) $\frac{v}{4}$ (b) $\frac{v}{2}$ (c) $2v$ (d) $4v$

Solution : (b) $v = \sqrt{5gr}$ $\therefore v \propto \sqrt{r}$ अतः $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{r/4}{r}} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_2 = v/2$

Problem 167. एक वस्तु एक घर्षणहीन मार्ग पर, जिसके अंत में D व्यास का एक वृत्ताकार लूप है, नीचे की ओर फिसलना प्रारंभ करती है। वस्तु की न्यूनतम ऊँचाई h, D के पदों में क्या होगी जिससे कि वह लूप को ठीक पूर्ण कर सके [AIIMS 2000]

(a) $h = \frac{5D}{2}$ (b) $h = \frac{5D}{4}$ (c) $h = \frac{3D}{4}$ (d) $h = \frac{D}{4}$

Solution : (b) हम जानते हैं कि, ऊर्ध्वाधर लूपिंग की क्रॉंतिक स्थिति में $h = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2}\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{5D}{4}$

Problem 168. एक बर्तन को पानी से भर कर 4 m त्रिज्या के ऊर्ध्वाधर वृत्त में इस प्रकार घुमाया जाता है, जिससे बर्तन से पानी न गिरे। चक्कर का आवर्तकाल होगा [CPMT 1985; RPET 1999]

(a) 1 *sec* (b) 10 *sec* (c) 8 *sec* (d) 4 *sec*

Solution : (d) उच्चतम बिन्दु पर $mg = m\omega^2 r \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{T^2}r \Rightarrow 10 = \frac{4\pi^2 4}{T^2} \Rightarrow T^2 = 16 \quad \therefore T = 4\,sec$

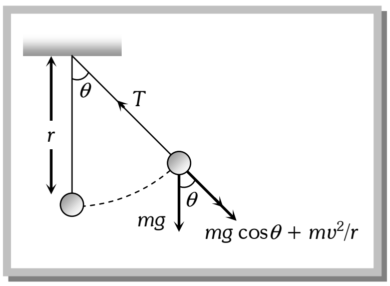
Problem 169. एक कण ऊर्ध्वाधर वृत्त में घूम रहा है। डोरी में तनाव, जब यह ऊर्ध्वाधर (निम्नतम स्थिति) से 30° तथा 60° के कोण बनाती है, क्रमशः T_1 तथा T_2 है, तब [Orissa JEE 2002]

(a) $T_1 = T_2$ (b) $T_1 > T_2$ (c) $T_1 < T_2$ (d) $T_1 \geq T_2$

Solution : (b) $T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{r}$

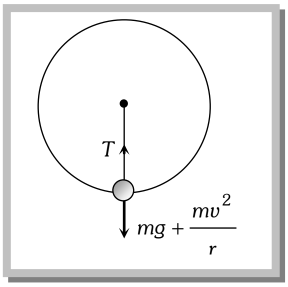
θ बढ़ने से T घटता है,

अतः $T_1 > T_2$



Problem 170. 2 *kg* के एक द्रव्यमान को 1 *m* लम्बी एक डोरी के सिरे से बाँधा जाता है। इसके पश्चात् इसे $5\ ms^{-1}$ के नियत वेग से ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है। दिया है $g = 10\ ms^{-2}$ निम्न में से किस स्थिति में डोरी में तनाव 70 *N* होगा

(a) उच्चतम बिन्दु पर (b) निम्नतम बिन्दु पर (c) जब डोरी क्षैतिज हो (d) उपरोक्त में से कोई नहीं



Solution : (b) अभिकेंद्रीय बल $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{2 \times (5)^2}{1} = 50\ Newton$

भार $= mg = 2 \times 10 = 20\ N$

तनाव = 70 *N* (उपरोक्त दो बलों का योग)

अर्थात् द्रव्यमान, ऊर्ध्वाधर वृत्त के निम्नतम बिन्दु पर होना चाहिए।

Problem 171. एक कण को 20 *m* लम्बी डोरी से बाँधकर ऊर्ध्वाधर तल में वृत्ताकार मार्ग में घुमाया जाता है। कण की उच्चतम स्थिति पर डोरी में तनाव शून्य है। उच्चतम स्थिति में कण का कोणीय वेग है [RPMT 1999]

(a) 0.5 *rad/sec* (b) 0.2 *rad/sec* (c) 7.5 *rad/sec* (d) 0.7 *rad/sec*

Solution : (d) $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{10}{20}} = \sqrt{0.5} = 0.7\ rad/sec$

Problem 172. एक वस्तु को जिसका द्रव्यमान 100*g* है, 1*m* लंबी डोरी से बाँधकर ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है। जब डोरी ऊर्ध्वाधर से 60^o कोण पर है, तब इसका वेग $2\ m/s$ है। $\theta = 60^o$ पर डोरी में तनाव होगा

(a) 89 *N* (b) 0.89 *N* (c) 8.9 *N* (d) 0.089 *N*

Solution : (b) $T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{r} = 0.1 \times 9.8 \times \cos 60 + \frac{0.1 \times (2)^2}{1} = 0.49 + 0.4 = 0.89\ N$

Problem 173. 2 *kg* द्रव्यमान की एक वस्तु 2 *m* त्रिज्या के ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति कर रही है। इसके निम्नतम बिन्दु से उच्च बिन्दु पर पहुँचने में, किया गया कार्य है

(a) 80 *J* (b) 40 *J* (c) 20 *J* (d) 0

Solution : (a) किया गया कार्य = स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन $= 2mgr = 2 \times 2 \times 10 \times 2 = 80\ J$

Problem 174. *m* द्रव्यमान की एक वस्तु को *l* लंबाई की डोरी से बाँधकर ऊर्ध्वाधर वृत्त घुमाया जाता है। वृत्त के निम्नतम बिन्दु पर, वस्तु की गतिज ऊर्जा क्या होनी चाहिये, जिससे वह वृत्त को ठीक पूर्ण कर सके [RPMT 1996]

(a) 5 *mgl* (b) 4 *mgl* (c) 2.5 *mgl* (d) 2 *mgl*

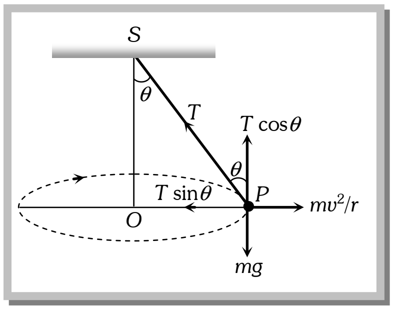
Solution : (c) ऊर्ध्वाधर लूप पूर्ण करने के लिए निम्नतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग $= \sqrt{5gl}$

अतः न्यूनतम गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}m(v^2) = \frac{1}{2}m(\sqrt{5gl})^2 = \frac{5}{2}mgl = 2.5\ mgl$

शंक्वाकार लोलक

यह क्षैतिज समतल में एकसमान वृत्तीय गति का उदाहरण है।

एक m द्रव्यमान के गोलक को एक भारहीन तथा अवितान्य डोरी से बाँधकर इसे r त्रिज्या के क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। ऊर्ध्वाधर के चारों ओर यह नियत कोणीय वेग ω से घूमता है। डोरी ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाती है, तथा एक शंकु की काल्पनिक सतह का निर्माण करती प्रतीत होती है। अतः इस व्यवस्था को शंक्वाकार लोलक कहा जाता है।



गोलक पर कार्यरत बल तनाव बल तथा गोलक का भार है

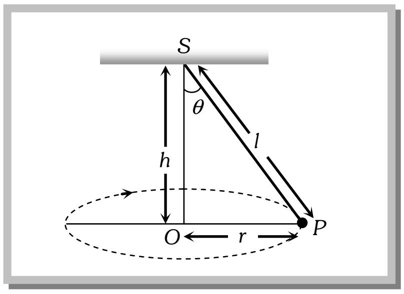
चित्र से $\quad T\sin\theta = \dfrac{mv^2}{r}$ ....(i)

तथा $\quad T\cos\theta = mg$ ....(ii)

(1) डोरी में तनाव : $T = mg\sqrt{1+\left(\dfrac{v^2}{rg}\right)^2}$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{mgl}{\sqrt{l^2 - r^2}} \qquad \left[\cos\theta = \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{l^2-r^2}}{l}\right]$$

(2) डोरी द्वारा ऊर्ध्वाधर से बनाया गया कोण : $\tan\theta = \dfrac{v^2}{rg}$

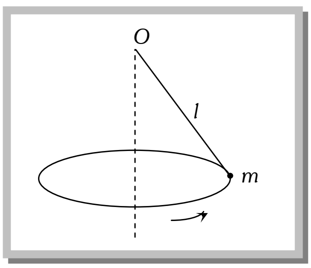


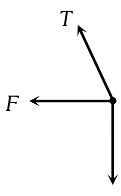
(3) गोलक का रेखीय वेग : $v = \sqrt{gr\tan\theta}$

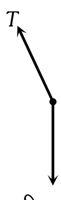
(4) गोलक का कोणीय वेग : $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}\tan\theta} = \sqrt{\dfrac{g}{h}} = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$

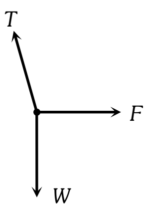
(5) घूर्णन का आवर्तकाल : $T_P = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l^2-r^2}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g\tan\theta}}$

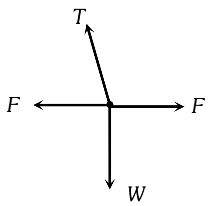
Problem 175. एक बिन्दु द्रव्यमान m को l लम्बाई की भारहीन डोरी, जो कि O पर स्थिर है, से बाँधकर नियत वेग से क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है। आपके मतानुसार, द्रव्यमान के सापेक्ष स्थिर होने पर, द्रव्यमान पर कार्यरत् बल हैं [AMU (Med.) 2001]



(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

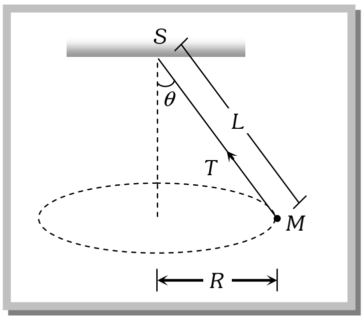
Solution : (c) अपकेन्द्रीय बल (F) त्रिज्यीय दिशा में बाहर की ओर कार्य करता है

भार (W) नीचे की ओर कार्यरत् है

तनाव (T) डोरी के अनुदिश तथा 'O' की ओर कार्यरत् है

Problem 176. L लंबाई की किसी डोरी का एक सिरा एक बिन्दु पर स्थिर है तथा दूसरे सिरे से द्रव्यमान M लटका है। डोरी ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारों ओर $2/\pi$ चक्कर प्रति सैकण्ड लगाती है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है, तब डोरी में तनाव होगा

[BHU 2002]



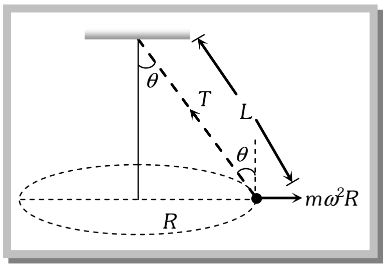
(a) ML (b) $2\,ML$ (c) $4\,ML$ (d) $16\,ML$

Solution : (d) $T\sin\theta = M\omega^2R$ ..... (i)

$T\sin\theta = M\omega^2 L\sin\theta$ ..... (ii)

समी. (i) व (ii) से

$T = M\omega^2 L = M4\pi^2n^2L = M4\pi^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 L = 16ML$



Problem 177. 1 m लम्बाई की एक डोरी के एक सिरे को स्थिर कर इसके दूसरे सिरे से 100gm द्रव्यमान को जोड़ा गया है। डोरी के निश्चित बिन्दु से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारों ओर डोरी $2/\pi$ चक्कर प्रति सैकण्ड लगाती है। डोरी का ऊर्ध्वाधर से झुकाव कोण होगा ($g = 10\ m/\sec^2$)

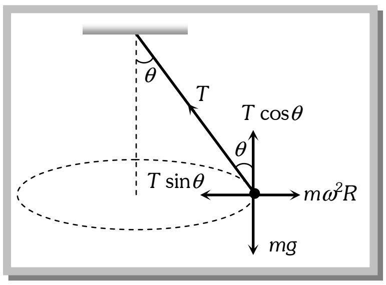
(a) $\tan^{-1}\frac{5}{8}$ (b) $\tan^{-1}\frac{8}{5}$ (c) $\cos^{-1}\frac{8}{5}$ (d) $\cos^{-1}\frac{5}{8}$

Solution : (d) क्रांतिक स्थिति में, संतुलनावस्था में

$T\sin\theta = m\omega^2 r$ तथा $T\cos\theta = mg$

$\therefore \tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$

$\Rightarrow \frac{4\pi^2n^2r}{g} = \frac{4\pi^2(2/\pi)^2.1}{10} = \frac{8}{5}$



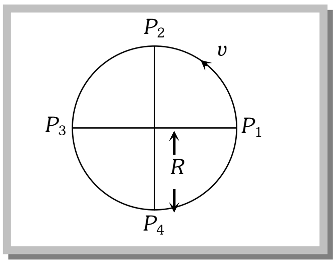
Problem 178. यदि एक घूर्णी रंगमंच की आवृत्ति f एवं इस पर खड़े एक लड़के की केन्द्र से दूरी r हो तो केन्द्र एवं लड़के को मिलाने वाली रेखा द्वारा प्रति सैकण्ड निर्मित क्षेत्रफल होगा

(a) πrf (b) $2\pi rf$ (c) $\pi r^2 f$ (d) $2\pi r^2 f$

Solution : (c) एक पूर्ण चक्कर में निर्मित क्षेत्रफल $= \pi r^2$

अतः एक सैकण्ड में निर्मित क्षेत्रफल $= \pi r^2 f$

Problem 179. नीचे प्रदर्शित चित्र में, द्रव्यमान M की एक वस्तु R त्रिज्या के वृत्त में एकसमान चाल v से गति कर रही है। बिन्दु P_1 से P_2 पर जाने में चाल में परिवर्तन होगा



(a) शून्य (b) $\sqrt{2v}$ (c) $v/\sqrt{2}$ (d) $2v$

Solution : (a) एकसमान वृत्तीय गति में चाल नियत रहती है अतः चाल में परिवर्तन शून्य होगा।

Problem 180. उपरोक्त प्रश्न में, P_1 से P_2 पर जाने में वेग में परिवर्तन है।

(a) शून्य (b) $\sqrt{2v}$ (c) $v/\sqrt{2}$ (d) $2\,v$

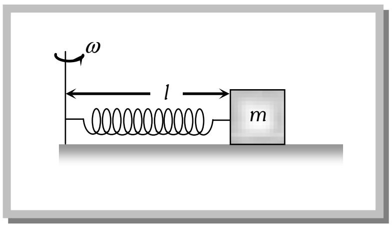
Solution : (b) वेग में परिवर्तन $= 2v\sin(\theta/2) = 2v\sin\left(\frac{90}{2}\right) = 2v\sin 45 = \frac{2v}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,v$

Problem 181. उपरोक्त प्रश्न में, P_1 से P_2 तक जाने में कोणीय वेग में परिवर्तन होगा

(a) शून्य (b) $\sqrt{2}\,v/R$ (c) $v/\sqrt{2}\,R$ (d) $2v/R$

Solution : (a) कोणीय वेग नियत रहता है, अतः कोणीय वेग में परिवर्तन शून्य होगा।

Problem 182. m द्रव्यमान का एक पिण्ड भारहीन स्प्रिंग के एक सिरे से जुड़ा है। स्प्रिंग का बल नियतांक k तथा सामान्य लम्बाई l है। अब गुरुत्व मुक्त स्थान में, निकाय को स्प्रिंग के दूसरे सिरे के सापेक्ष, कोणीय वेग ω से घुमाया जाता है। स्प्रिंग की लंबाई में वृद्धि होगी



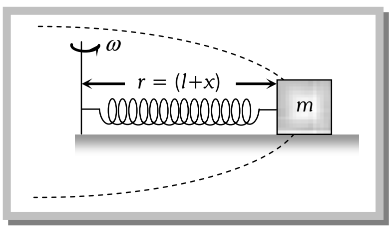
(a) $\frac{m\omega^2 l}{k}$

(b) $\frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2}$

(c) $\frac{m\omega^2 l}{k + m\omega^2}$

(d) इनमें से कोई नहीं

Solution : (b) दी गई स्थिति में, स्प्रिंग का प्रत्यास्थ बल, आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है



$k\,x = m\,\omega^2 r$

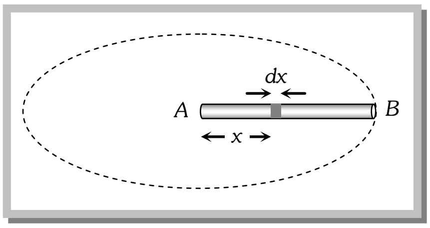
$k\,x = m\,\omega^2(l + x) \Rightarrow k\,x = m\omega^2 l + m\,\omega^2 x \Rightarrow x(k - m\,\omega^2) = m\,\omega^2 l$

$\therefore\ x = \frac{m\,\omega^2 l}{k - m\,\omega^2}$

Problem 183. एक m द्रव्यमान तथा l लम्बाई की एकसमान छड़ को क्षैतिज समतल में इसके एक सिरे से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारों ओर कोणीय वेग ω से घुमाया जाता है। अक्ष से x दूरी पर छड़ में तनाव होगा

(a) $\frac{1}{2}m\omega^2 x$ (b) $\frac{1}{2}m\omega^2\frac{x^2}{l}$ (c) $\frac{1}{2}m\omega^2 l\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ (d) $\frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{l}[l^2 - x^2]$

Solution : (d) माना कि छड़ *AB* बिन्दु *A* के चारों ओर एकसमान वृत्तीय गति कर रही है। हमें घूर्णन अक्ष से *x* दूरी पर छड़ में तनाव ज्ञात करना है। माना *x* दूरी पर, छड़ के अत्यंत सूक्ष्म भाग का द्रव्यमान *dm* है



अतः $dT = dm\omega^2 x = \left(\frac{m}{l}\right)dx.\omega^2 x = \frac{m\omega^2}{l}$ [x d x]

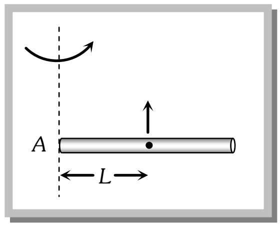
दोनों पक्षों समाकलन करने पर $\int_x^l dT = \frac{m\omega^2}{l}\int_x^l x\,dx \Rightarrow T = \frac{m\omega^2}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^l$

$\therefore\ T = \frac{m\omega^2}{2l}\left[l^2 - x^2\right]$

Problem 184. एक लंबी क्षैतिज छड़ पर एक मणिका (Bead) रखा है, जो कि इसकी लंबाई के अनुदिश फिसल सकता है, तथा इसे प्रारंभ में छड़ के एक सिरे *A* से *L* दूरी पर रखा जाता है। अब छड़ *A* के सापेक्ष नियत कोणीय त्वरण α से कोणीय गति करती है। यदि छड़ तथा मणिका (Bead) के बीच घर्षण गुणांक μ है, तब गुरुत्व को नगण्य मानने पर, वह समय जिसके पश्चात् मणिका (Bead) फिसलना शुरू करता है [IIT-JEE (Screening) 2000]

(a) $\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$ (b) $\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{\mu\alpha}}$ (d) अनंत

Solution : (a) माना कि मणिका (Bead) *t* समय पश्चात् फिसलना शुरू करता है।



क्राँतिक स्थिति में, घर्षण बल, आवश्यक अभिकेंद्रीय बल प्रदान करता है

$m\omega^2 L = \mu R = \mu m \times a_t = \mu m L\alpha$

$m(\alpha t)^2 L = \mu m L\alpha \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$ (जहाँ $\omega = \alpha t$)

Problem 185. एक घर्षणहीन टेबल क्षैतिजतः स्थित है। एक आदर्श स्प्रिंग, का स्प्रिंग नियतांक $k = 1000\ N/m$ तथा सामान्य लंबाई $0.5m$ है। इस स्प्रिंग का एक सिरा टेबल के केन्द्र पर कैसा है। स्प्रिंग के दूसरे सिरे से $5kg$ का द्रव्यमान जोड़कर नियत चाल $20m/s$ से वृत्ताकार मार्ग में घुमाया जाता है। तब स्प्रिंग में तनाव तथा इसकी लंबाई में होने वाली वृद्धि होगी

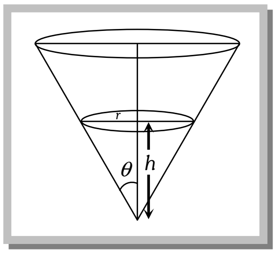
(a) 500 *N*, 0.5 *m* (b) 600 *N*, 0.6 *m* (c) 700 *N*, 0.7 *m* (d) 800 *N*, 0.8 *m*

Solution : (a) $k = 1000,\ m = 5kg,\ l = 0.5m,\ v = 20m/s$ (दिया है)

प्रत्यानयन बल $= kx = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{l+x} \Rightarrow 1000x = \frac{5(20)^2}{0.5+x} \Rightarrow x = 0.5m$

तथा स्प्रिंग में तनाव $= kx = 1000 \times \frac{1}{2} = 500N$

Problem 186. एक कण कीप (Funnel) सदृश पात्र में क्षैतिज वृत्त में गति करता है। कीप (Funnel) की सतह घर्षणहीन है। कण का वेग *r* तथा θ के पदों में होगा



(a) $v = \sqrt{rg/\tan\theta}$

(b) $v = \sqrt{rg\tan\theta}$

(c) $v = \sqrt{rg\cot\theta}$

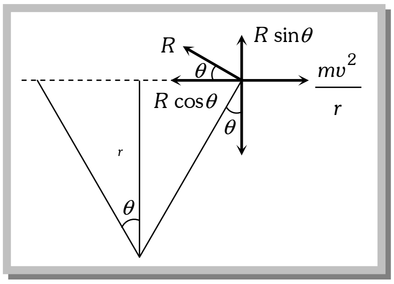
(d) $v = \sqrt{rg/\cot\theta}$

Solution : (c) कण की एकसमान वृत्तीय गति के लिये $\frac{mv^2}{r} = R\cos\theta$ ....(i)

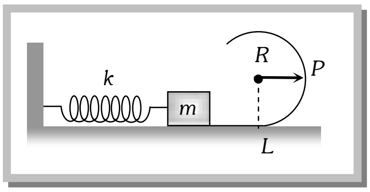
तथा $mg = R\sin\theta$ ....(ii)

समी. (i) में समी. (ii) से भाग देने पर

$\frac{v^2}{rg} = \cot\theta \Rightarrow v = \sqrt{rg\cot\theta}$



Problem 187. नीचे चित्र में एक चिकने घर्षणहीन मार्ग को प्रदर्शित किया गया है, जिसका एक भाग R त्रिज्या के वृत्त में है। एक m द्रव्यमान के पिण्ड को एक स्प्रिंग, जो कि बाँये सिरे से स्थिर की गई है तथा जिसका बल नियतांक k है, के विरुद्ध दबाया जाता है तथा फिर छोड़ दिया जाता है। स्प्रिंग पर प्रारंभिक दबाव कितना होना चाहिये जिससे कि पिण्ड बिन्दु P पर मार्ग को mg बल से दबा सके, P का त्रिज्यीय सदिश क्षैतिज है।



(a) $\sqrt{\frac{mgR}{3k}}$ (b) $\sqrt{\frac{3gR}{mk}}$ (c) $\sqrt{\frac{3mgR}{k}}$ (d) $\sqrt{\frac{3mg}{kR}}$

Solution : (c) दी गई स्थिति में, P पर अपकेंद्रीय बल, mg के बराबर होना चाहिए

अर्थात् $\frac{mv_P^2}{R} = mg \therefore v_P = \sqrt{Rg}$

इससे हम वृत्तीय मार्ग के निम्नतम बिन्दु पर आवश्यक वेग की गणना आसानी से कर सकते हैं।

$v_p^2 = v_L^2 - 2gR$ (सूत्र $v^2 = u^2 - 2gh$ से)

$v_L = \sqrt{v_P^2 + 2gR} = \sqrt{Rg + 2gR} = \sqrt{3gR}$ इसका अर्थ है, कि पिण्ड में गतिज ऊर्जा होगी

अतः $= \frac{1}{2}mv_L^2 = \frac{1}{2}m \times 3gR$ तथा ऊर्जा संरक्षण के नियम से $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}3m \times gR \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3mgR}{k}}$